

1. "Arkimedes princip" säger att om  $a$  och  $b$  är godtyckliga positiva reella tal så existerar ett naturligt tal  $n$  sådant att  $nb > a$ . Formulera Arkimedes princip med hjälp av kvantorerna " $\forall$ " och " $\exists$ " (Du kan beteckna med  $\mathbb{N}$  de naturliga talen och med  $\mathbb{R}_+$  de reella positiva). Formulera också negationen till "Arkimedes princip".
2. Låt  $A$ ,  $B$  och  $C$  beteckna tre mängder. Rita Venn-diagram som svarar mot vänster- och högerled i likheten:

$$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = C \setminus (A \cup B).$$

Stämmer likheten? Bevisa Ditt påstående! Använd definitionerna av " $\cup$ ,  $\cap$ " och " $\setminus$ ". Vilka logiska lagar (tautologier) har Du använt?

3. Låt  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , där  $\mathbb{Z}$  betecknar heltalen. Besvara följande frågor:

- (a) Är funktionen  $f(n) = n^2$  injektiv?
- (b) Är funktionen  $f(n) = n^3$  injektiv?
- (c) Är funktionen  $f(n) = (-1)^n n$  bijektiv?

Motivera noga Dina svar med hjälp av lämpliga definitioner!

4. (a) Vad menas med en uppräknelig mängd?

(b) Talen  $a + bi$ , där  $a$  och  $b$  är heltal och  $i^2 = -1$ , kallas Gaussiska heltal (t ex  $1 + i$ ,  $1 + 2i$ ,  $-1 + 3i$  osv). Visa att de Gaussiska heltalen bildar en uppräknelig mängd. Du kan börja med fallet då  $a > 0$  och  $b > 0$ , men det är inte nödvändigt.

5. Bevisa med hjälp av matematisk induktion likheten

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 11 + \dots + n(3n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+3)}{2}$$

då  $n = 1, 2, 3, \dots$

6. Visa att varje produkt av tre efterföljande jämna heltal (som t.ex. 4,6,8 eller 10,12,14) är delbar med 48.

7. Bestäm alla möjliga rationella tal  $\frac{x}{5}$  och  $\frac{y}{7}$  ( $x, y$  heltal) sådana att

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{7} = \frac{1}{35}.$$

8. (a) Låt  $z_1$  och  $z_2$  vara komplexa tal. Visa att  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .

(b) Bestäm alla komplexa tal  $z$  sådana att  $|z - 1| = |z - 3|$  och tolka geometriskt deras läge i komplexa talplanet.

**Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 20p.**

Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 21 mars. Upplýsningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon fr o m den 21 mars: tel. 772 3509 efter kl. 14.00.