LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN
I MAL 200/220 del 3/1 2000-03-06

1. **"Arkimedes princip" säger att om a och b är godtyckliga positiva reella tal så existerar ett naturligt tal n sådant att $nb > a$. Formulera Arkimedes princip med hjälp av kvantorerna "$\forall$" och "$\exists$" (Du kan beteckna med $\mathbb{N}$ de naturliga talen och med $\mathbb{R}_+$ de reella positiva). Formulera också negationen till "Arkimedes princip".**

   "Arkimedes princip" säger att: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+ \; \exists\, n \in \mathbb{N} \, : nb > a$. Dess negation är:

$$\neg(\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+ \; \exists n \in \mathbb{N} \, : nb > a) \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}_+ \; \forall n \in \mathbb{N} \, : nb \leq a.$$

2. **Låt A, B och C beteckna tre mängder. Rita Venn–diagram som svarar mot vänster– och högerled i likheten:**

$$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = C \setminus (A \cup B).$$

   Stämmer likheten? Bevisa Ditt påstående! Använd definitionerna av "$\cup, \cap$" och "$\setminus$". Vilka logiska lagar (tautologier) har Du använt?

   Av tekniska skäl utelämnar vi Venn–diagram som måste ritas och visar att likheten gäller. Nedan följer bevis:

$$x \in \mathrm{VL} \Leftrightarrow x \in ((C \setminus A) \cap (C \setminus B)) \Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \wedge x \in (C \setminus B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \wedge x \in C \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$x \in (C \setminus (A \cup B)) \Leftrightarrow x \in \mathrm{HL}.$$

   Alltså är VL = HL. Vi har bl a utnyttjat de Morgans lag: $(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$, där p är utsagan $x \in A$, och q utsagan $x \in B$.

3. **Låt $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, där $\mathbb{Z}$ betecknar heltalen. Besvara följande frågor:**
   (a) Är funktionen $f(n) = n^2$ injektiv?
   (b) Är funktionen $f(n) = n^3$ injektiv?
   (c) Är funktionen $f(n) = (-1)^n n$ bijektiv?
   Motivera noga Dina svar med hjälp av lämpliga definitioner!

   (a) Funktionen är inte injektiv. T ex är $f(2) = f(-2) = 4$ dvs två olika element i första mängden avbildas på samma element i den andra (bägge mängderna är lika med heltalen).

   (b) Funktionen är injektiv dvs om $n_1 \neq n_2$ så är $f(n_1) = n_1^3 \neq n_2^3 = f(n_2)$.

   (c) Om n är jämnt så är $f(n) = (-1)^n n = n$. Om n är udda så är $f(n) = (-1)^n n = -n$. Alltså är funktionen injektiv eftersom olika heltal har olika bilder. Den är också surjektiv eftersom varje jämnt heltal är bilden av sig självt, och varje udda heltal är bilden av det motsatta talet.

(b) Talen $a + bi$, där a och b är heltal och $i^2 = -1$, kallas Gaussiska heltal (t ex $1 + i, 1 + 2i, -1 + 3i$ osv). Visa att de Gaussiska heltalen bildar en uppräknelig mängd. Du kan börja med fallet då $a > 0$ och $b > 0$, men det är inte nödvändigt.

(a) Se stencilen "Ändligt och oändligt".

(b) Först skriver vi ut alla Gaussiska heltal $a + bi$ med $a \geq 0$ och $b \geq 0$ i följande tabell:

$$
\begin{tikzcd}
0+0i \arrow[r] & 0+1i \arrow[dl] & 0+2i \arrow[r] & 0+3i \arrow[dl] & \cdots \\
1+0i \arrow[d] & 1+1i \arrow[ur] & 1+2i \arrow[dl] & 1+3i & \cdots \\
2+0i \arrow[ur] & 2+1i \arrow[dl] & 2+2i & 2+3 & \cdots \\
3+0i & 3+1i & 3+2i & 3+3i & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Vi numrerar talen i tabellen i enlighet med pilarnas riktning. Detta visar att alla Gaussiska heltal $a + bi$ med $a \geq 0$ och $b \geq 0$ bildar en uppräknelig mängd. På samma sätt visar man att de tre andra mängderna: talen $a + bi$ med heltaliga a, b och $a \leq 0, b \leq 0$, talen $a + bi$ med $a \leq 0, b \geq 0$ och talen $a + bi$ med $a \geq 0, b \leq 0$ också är uppräkneliga. Eftersom unionen av uppräkneliga mängder är en uppräknelig mängd (se stencilen "Ändligt och oändligt") får vi att de Gaussiska heltalen är uppräkneliga.

5. **Bevisa med hjälp av matematisk induktion likheten**

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 11 + \cdots + n(3n + 2) = \frac{n(n + 1)(2n + 3)}{2}$$

då $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Först kontrollerar vi likheten för $n = 1$. Då är VL $= 1 \cdot 5 = 5$, och HL $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2} = 5$. Alltså gäller formeln i detta fall.

Nu förutsätter vi att formeln gäller för ett naturligt tal $n = k$ dvs

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 11 + \cdots + k(3k + 2) = \frac{k(k + 1)(2k + 3)}{2}$$

och vi vill visa att den också gäller för nästa tal $n = k + 1$ dvs

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 11 + \cdots + k(3k + 2) + (k + 1)(3k + 5) = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 5)}{2}.$$

Bevis:

$$\text{VL} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 11 + \cdots + k(3k + 2) + (k + 1)(3k + 5) =$$

$$\frac{k(k + 1)(2k + 3)}{2} + (k + 1)(3k + 5) = \frac{k(k + 1)(2k + 3) + 2(k + 1)(3k + 5)}{2} =$$

$$\frac{(n+1)[n(2n+3)+2(3n+5)]}{2} = \frac{(n+1)(2n^2+9n+10)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+5)}{2}.$$

Enligt induktionsprincipen gäller likheten för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6. **Visa att varje produkt av tre efterföljande jämna heltal (som t.ex. 4,6,8 eller 10,12,14) är delbar med 48.**

Tre efterföljande jämna heltal kan betecknas med $2n-2, 2n, 2n+2$, där n är ett godtyckligt heltal. Deras produkt $T = (2n-2)2n(2n+2) = 8(n-1)n(n+1)$. Talen $n-1, n, n+1$ är tre efterföljande heltal så att minst ett av dessa tal är delbart med 2 och exakt ett är delbart med 3. Alltså är produkten $(n-1)n(n+1)$ delbar med 6. Detta visar att talet T är delbart med $8 \cdot 6 = 48$.

7. **Bestäm alla möjliga rationella tal $\frac{x}{5}$ och $\frac{y}{7}$ (x, y heltal) sådana att**

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{7} = \frac{1}{35}.$$

Likheten i texten är ekvivalent med likheten $7x - 5y = 1$. Denna ekvation har en partikulär lösning $x_0 = 3, y_0 = 4$. Alltså gäller likheten $7x - 5y = 7x_0 - 5y_0$ dvs $7(x - x_0) = 5(y - y_0)$. Den sista likheten visar att $5|(x - x_0)$ så att $x - x_0 = 5k$, där k är ett godtyckligt heltal. Insättning i $7(x - x_0) = 5(y - y_0)$ ger $7 \cdot 5k = 5(y - y_0)$ så att $y - y_0 = 7k$. Alltså får vi $x = x_0 + 5k = 3 + 5k$ och $y = y_0 + 7k = 4 + 7k$, där $k \in \mathbb{Z}$. Alla rationella tal med den önskade egenskapen är alltså $\frac{3+5k}{5}$ och $\frac{4+7k}{7}$, där $k \in \mathbb{Z}$.

8. **(a) Låt z_1 och z_2 vara komplexa tal. Visa att $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.**

   (b) Bestäm alla komplexa tal z sådana att $|z-1| = |z-3|$ och tolka geomtriskt deras läge i komplexa talplanet.

(a) Vi har $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$. Alltså är $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(b) En algebraisk lösning: Låt $z = a + bi$ och $|z-1| = |z-3|$. Då är $|a + bi - 1| = |a + bi - 3|$ dvs $|(a-1) + bi| = |(a-3) + bi|$, så att $\sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{(a-3)^2 + b^2}$. Efter kvadrering ger den sista ekvationen att $(a-1)^2 = (a-3)^2$, vilket är ekvivalent med att $-2a + 1 = -6a + 9$. Alltså är $a = 2$. Svaret är att $z = 2 + bi$ med ett godtyckligt reellt b. Geometriskt är denna mängd mittpunktsnormalen till sträckan mellan 1 och 3 i det komplexa talplanet.

En geometrisk lösning: Likheten $|z-1| = |z-3|$ säger att i det komplexa talplanet är avstånden från punkten z till punkterna 1 och 3 lika. Alla punkter z med denna egenskap ligger på mittpunktsnormalen till sträckan mellan punkterna 1 och 3 dvs på den linje för vilken realdelen är lika med 2 (linjen genom 2 som är vinkelrät till sträckan mellan 1 och 3). Detta innebär att linjen består av alla komplexa tal $z = 2 + bi$, där b är ett godtyckligt reellt tal.