Göteborgs universitet

1998-11-28, kl 8.45 - 13.45

Telefonvakt: Sebastian Sandberg, tel. 0740 479626

1. Låt a, b, c, d beteckna heltal. Vilka av följande påståenden är sanna? Bevisa eller ge ett motexempel!
   (a) Om $a|b$ och $c|d$ så $a + c|b + d$.
   (b) Om a och b är udda så är talet $a + b + ab$ udda.
   (c) a och b är udda då och endast då $a + b + ab$ är udda.

2. (a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att formulera följande utsaga: Om x, y och z är heltal och $x^2 + y^2 = z^2$ så är minst ett av talen x, y och z delbart med 7.
   (b) Formulera negationen till utsagan i (a).
   (c) Är utsagan i (a) sann eller falsk? Bevisa Ditt påstående.

3. Låt A, B och C beteckna tre mängder. Rita Venn–diagram som svarar mot vänster– och högerled i likheten:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

   Stämmer likheten? Bevisa Ditt påstående! Använd definitionerna av "$\cup, \cap$" och "$\setminus$".

4. Jämför talen $3^n + 4^n$ och 5^n då $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Undersök för varje n vilket av dessa två tal som är störst. Ställ upp en förmodan och bevisa Ditt påstående med hjälp av matematisk induktion.

5. Bestäm alla heltaliga lösningar till ekvationen $3x - 7y = 20$ och välj bland dessa lösningar minst en i vilken både x och y är heltaliga kvadrater (dvs bestäm minst en lösning till den diofantiska ekvationen $3a^2 - 7b^2 = 20$).

6. (a) Vad menas med ett sammansatt tal? Ge ett exempel på en följd bestående av 100 sammansatta heltal som följer efter varandra.
   (b) Visa att det finns oändligt många primtal.

7. Låt z_1 och z_2 vara två komplexa tal.
   (a) Tolka geometriskt talen $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$ och $|z_1 - z_2|$.
   (b) Ge en geometrisk tolkning av likheten:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

   (c) Bevisa att likheten i (b) gäller för godtyckliga z_1 och z_2.

8. Låt a och b vara två relativt prima heltal dvs $\text{SGD}(a, b) = 1$. Bevisa att $\text{SGD}(a + b, a - b) = 1$ eller 2.

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 20p.
Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 8 december.