Göteborgs universitet **MAL 200, del 3, 2p + 3p**
1998-08-15, kl 8.45 - 12.45 för 3p, kl 8.45 – 13.45 för 5p
Hjälpmedel: valfri miniräknare
Telefonvakt: tel. 0740–479626

1. (a) Definiera begreppet uppräknelig mängd.

   (b) Motivera att alla rationella tal $2^m 3^n$, där m och n är positiva heltal, bildar en uppräknelig mängd.

2. (a) $3x + 5y = 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$, är ett exempel på en Diofantisk ekvation. Ge exempel på en annan Diofantisk ekvation. Du får inte enbart ersätta 3, 5 och 1 med andra heltal.

   (b) Ge exempel på en funktion från $A = \{1, 2, 3\}$ till $B = \{a, b, c\}$ som inte är bijektiv. Förklara varför!

   (c) Ge exempel på ett polynom med rationella koefficienter som inte kan faktoruppdelas i $\mathbb{Q}[X]$, men som kan faktoruppdelas i $\mathbb{R}[X]$.

3. Beräkna $\mathrm{SGD}(2^4 \cdot 3^{10} \cdot 5^7, 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5)$ och $\mathrm{MGM}(2^4 \cdot 3^{10} \cdot 5^7, 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5)$. På vilken sats bygger Dina beräkningar? Formulera denna sats och förklara olika begrepp som Du använder.

4. (a) Formulera induktionsprincipen.

   (b) I en talföljd $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är $a_1 = 2$ och $a_{k+1} = a_k + 2k + 1$ då $k \geq 1$. Beräkna a_2, a_3, a_4 och a_5. Gissa en formel för a_n och bevisa denna med matematisk induktion.

5. Beräkna $(1 + i)^{100}(1 - i)^{80}$ och ange svaret som ett heltal.

6. (a) Man vet att polynomet $x^n + ax + b$ har två nollställen: $x_1 = -1$ och $x_2 = 1$. Välj ett udda och ett jämnt värde på n då detta gäller samt beräkna motsvarande a och b.

   (b) För hur många olika n kan problemet lösas? Kan Du skriva ut alla polynom som löser (a)?

   Om Du inte har godkända inlämningsuppgifter löser Du efterföljande problem 7 – 9:

7. (a) Skriv med hjälp av de logiska konnektiven och kvantorer utsagan: *Om m och n är heltal och 5 delar $m^2 + n^2$ så måste 5 dela m eller n.*

   (b) Skriv ut negationen av utsagan i (a) så att negationssymbolen inte förekommer i svaret

   Är den givna utsagan falsk eller sann? (studera några exempel)

8. Rita Venn–diagram som svarar mot vänster– och högerled i likheten:

   $$A \setminus (B \cup C) = A \setminus [(B \cup C) \setminus (B \cap C)].$$

   Ge ett exempel på A, B och C då denna likhet gäller och ett exempel då den inte gäller.

9. Ge ett konkret exempel på ett “motsägelsebevis”.

Varje uppgift ger maximalt 3p.
Om Du har godkända inlämningsuppgifter löser Du uppgifterna 1 – 6. Det krävs minst 8p för godkänt och minst 15p för väl godkänt (med bonus från inlämningsuppgifter 14p).
Om Du inte har gjort inlämningsuppgifter krävs dessutom minst 4p på uppgifterna 7 – 9. För att få bonuspoäng på 1 – 6 krävs minst 7p på dessa uppgifter (eller 22p på hela skrivningen).
Tentamensresultaten meddelas senast den 1 september kl. 13.30.