Explorativ övning 10

RELATIONER OCH FUNKTIONER*

Övningens syfte är att bekanta sig med begreppet **relation** på en mängd M. Begreppet "relation" i matematiska sammanhang anknyter till betydelsen av samma ord i vardagliga situationer då en relation ofta är ett samband mellan två individer (dvs ett par). Den formella definitionen är följande (se också Vretblads bok avsnitt 3.3):

(10.1) Definition. Med en **relation** R på en mängd M menas en godtycklig mängd bestående av par (x, y), där $x, y \in M$. Med andra ord är en relation på M en godtycklig delmängd R till den kartesiska produkten

$$M \times M = \{(x, y) : x, y \in M\}.$$

$\square$

Om $x, y \in M$ och $(x, y) \in R$, där R är en relation på M så skriver man ofta $x \sim y$. Men " $\sim$ " ersätts oftast med andra tecken som traditionellt betecknar kända relationer t ex med " $\leq$ " eller "$|$".

Exempel. (a) Låt M vara mängden av alla elever i en skola. Vi förutsätter att skolan är av "gammal modell" så att varje elev tillhör exakt en klass. Två elever x och y är relaterade, dvs $x \sim y$, precis då x och y går i samma klass. R består i detta fall av alla par (x, y), där x och y är två elever som går i samma klass (även par (x, x) är tillåtna).

(b) Låt $M = \{1, 2, 3, 4\}$ och låt

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Man kan skriva $1 \sim 3$ eller $2 \sim 2$. Man har sammanlagt 16 par (x, y) i $M \times M$, men endast

*MAL200/220, vt 01

8 par ingår i relationen R. Relationen R är helt enkelt delbarhetsrelationen på mängden M dvs $x \sim y$ precis då $x|y$.

(c) Låt $M = \mathbb{R}$ vara mängden av de reella talen. Definiera $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset M \times M$. Relationen R är helt enkelt grafen av funktionen $f(x) = x^2$ dvs den består av alla punkter på parabeln $y = x^2$. Här har vi $x \sim y$ precis då $y = x^2$.

Huvudbegreppen i detta avsnitt är

- relation
- ekvivalensrelation
- ekvivalensklasser och partitioner

Dessutom diskuterar vi mycket kort

- ordningsrelationer
- funktionsgrafer som relationer

Vi presenterar kortfattat dessa begrepp nedan. De finns också i avsnitten 3.3 och 3.4 i Vretblads bok.

Ett så allmänt relationsbegrepp är inte särskilt användbart. Men i matematiska situationer har man olika relationer som satisfierar olika ytterligare villkor. Vi diskuterar först **ekvivalensrelationer** och därefter, mycket kort, **ordningsrelationer** och **funktionsgrafer**.

(10.2) Definition. En relation " $\sim$ " på en mängd M kallas för en **ekvivalensrelation** om

(a) $x \sim x$ (reflexivitet),

(b) $x \sim y$ implicerar $y \sim x$ (symmetri),

(c) $x \sim y$ och $y \sim z$ implicerar $x \sim z$ (transitivitet),

då $x, y, z \in M$. $\square$

Exempel. Låt M vara mängden av alla elever i en skola (som ovan) och låt två elever x och y vara relaterade, dvs $x \sim y$, precis då x och y går i samma klass. Man kontrollerar utan svårigheter att "$\sim$" är en ekvivalensrelation på M: $x \sim x$ (ty x och x går i samma klass), $x \sim y$ ger $y \sim x$ (ty x och y går i samma klass ger att y och x går i samma klass), och slutligen, $x \sim y$ och $y \sim z$ ger $x \sim z$ (ty x och y går i samma klass samt y och z går i samma klass ger att x och z går i samma klass).

(10.3) Definition. Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på en mängd M. Med **ekvivalensklassen** av $x \in M$ menas mängden

$$[x] = \{y \in M : y \sim x\}.$$

Man säger att x är klassens **representant**. $\square$

Om M är mängden av alla elever i en skola och x är en elev, så är ekvivalensklassen $[x]$ mängden av alla elever som går i samma klass som x. Varje elev representerar sin klass. Alla klasser ger en partition av M – varje elev går i en klass och olika klasser är disjunkta. Rent allmänt definierar vi:

(10.4) Definition. En **partition** av en mängd M är en uppdelning av alla element tillhörande M i parvis disjunkta delmängder. $\square$

Vi visar nedan att ekvivalensklasserna till en ekvivalensrelation på M utgör en partition av M dvs M är unionen av alla ekvivalensklasser och olika ekvivalensklasser är parvis disjunkta.

(10.5) Proposition. *Låt M vara en mängd med en ekvivalensrelation $\sim$.*

(*a*) *Varje element i M tillhör en ekvivalensklass, mera exakt: $x \in [x]$.*

(*b*) *Två element representerar samma ekvivalensklass då och endast då de är ekvivalenta dvs $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$.*

(*c*) *Två olika ekvivalensklasser är disjunkta.*

(*d*) *M är unionen av alla ekvivalensklasser.*

Bevis. (a) är klart ty $x \sim x$ innebär att $x \in [x]$.

(b) $[x] = [y] \Rightarrow x \in [x] = [y] \Rightarrow x \sim y$. Antag nu att $x \sim y$. Om $z \in [x]$ så ger $z \sim x$ och $x \sim y$ att $z \sim y$ så att $z \in [y]$. Alltså är $[x] \subseteq [y]$. Av symmetriskäl har man också $[y] \subseteq [x]$.

(c) Om $z \in [x] \cap [y]$ så är $z \sim x$ och $z \sim y$ så att $x \sim y$ ur symmetrin och transitiviteten ($z \sim x$ ger $x \sim z$ som med $z \sim y$ ger $x \sim y$). Enligt (b) är $[x] = [y]$. Detta betyder att om $[x] \neq [y]$ så saknar dessa klasser något gemensamt element z.

(d) Följer direkt ur (a). $\square$

(10.6) Följdsats. *Ekvivalensklasserna av varje ekvivalensrelation på M bildar en partition av M.*

Bevis. Följer omedelbart från (c) och (d) i (10.5). □.

Man kontrollerar mycket lätt att om M är en mängd (t ex mängden av alla elever i en skola) som man har uppdelat i parvis disjunkta delmängder M_i (t ex klasser) dvs $M = \cup M_i$ och $M_i \cap M_j = \emptyset$ om $i \neq j$, så har man en ekvivalensrelation på M: man definierar $x \sim y$ då x och y tillhör samma partitionsmängd M_i.

Detta visar att ekvivalensrelationer på mängder är helt enkelt partitioner av dessa mängder dvs uppdelningar i parvis disjunkta delmängder. Dessa uppdelningar uppstår som resultat av en speciell egenskap hos visa par av mängdens element. En partition är en klassifikation av mängdens element med avseende på en viss (ofta intressant) egenskap – denna egenskap är given genom en ekvivalensrelation på mängden (tänk igen på elever i en skola och deras "klassifikation" efter tillhörigheten till olika klasser).

En annan mycket vanlig typ av relationer är ordningsrelationer.

(10.7) Definition. En relation " $\preceq$ " på en mängd M kallas en **partiell ordningsrelation** (eller en **partiell ordning**) om

(a) $x \preceq x$ (reflexivitet),

(b) $x \preceq y$ och $y \preceq z$ implicerar att $x \preceq z$ (transitivitet),

(c) $x \preceq y$ och $y \preceq x$ implicerar att $x = y$ (antisymmetri).

Man skriver $x \prec y$ om $x \preceq y$ och $x \neq y$. Om dessutom en relation " $\preceq$ " satisfierar

(d) för godtyckliga $x, y \in M$ gäller det att $x \prec y$ eller $y \prec x$ eller $x = y$ (trihotomi),

så säger man att relationen är en **ordningsrelation** (eller en **ordning** på M). □

(10.8) Exempel. (a) Låt $M = \mathbb{R}$ och låt $x \preceq y$ betecknar den vanliga ordningsrelationen $x \leq y$ på de reella talen. Vi vet mycket väl att den relationen är en ordningsrelation i enlighet med definitionen ovan.

(b) Låt $M = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ vara mängden av de naturliga talen. Relationen $x|y$ (dvs "$\preceq$" tolkas som "$|$") är en partiell ordningsrelation på $\mathbb{N}$ ty $x|x$, om $x|y$ och $y|z$ så $x|z$ samt $x|y$ och $y|x$ ger $x = y$. Men "$|$" är inte en ordningsrelation, ty (d) i definitionen ovan gäller inte då man t ex väljer $x = 2$ och $y = 3$. □

(10.9) Vi avslutar med en observation att varje funktion $f : X \to X$ definierar en relation – nämligen mängden av alla par $(x, f(x)) \in X \times X$. Låt oss påminna om att med en funktion från en mängd X till en mängd Y menar man vanligen en regel som mot varje $x \in X$ ordnar exakt ett element $y \in Y$. Då skriver man $y = f(x)$ och $f : X \to Y$. I vårt fall har vi $X = Y$ och vi får en relation på X då $x \sim y$ om och endast om $y = f(x)$. Parmängden som svarar mot f består alltså av alla par $(x, f(x))$.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

kallas ofta **grafen** av funktionen f.

Övning A

1. Låt M vara mängden av alla invånare i Göteborg. Betrakta följande relationer $x \sim y$ då $x, y \in M$ och avgör om de är reflexiva, symmetriska, transitiva, ekvivalensrelationer:
   (a) $x \sim y$ då och endast då x och y är födda samma dag.
   (b) $x \sim y$ då och endast då x och y bor i samma stadsdel.
   (c) $x \sim y$ då och endast då x och y känner varandra.
   (d) $x \sim y$ då och endast då x och y är gifta med varandra.
2. Ge i varje exempel ovan då relationen är en ekvivalensrelation en beskrivning av alla ekvivalensklasser genom att välja en representant för varje klass.

Övning B

1. Vilka av de följande relationerna på den givna mängden M är ekvivalensrelationer:
   (a) $M = \mathbb{Z}$, $x \sim y$ då och endast då $4|x - y$. Generalisera detta exempel,
   (b) $M = \mathbb{N}$, $x \sim y$ då och endast då x och y har samma primfaktorer,
   (c) $M = \mathbb{N}$, $x \sim y$ då och endast då xy är en kvadrat av ett naturligt tal,
   (d) $M = \mathbb{R}^2$, $(a, b) \sim (c, d)$ då och endast då $b = d$.
   (e) $M = \mathbb{R}^2$, $(a, b) \sim (c, d)$ då och endast då $a = c$ eller $b = d$.
   (f) $M = \mathbb{R}$, $a \sim b$ då och endast då $a - b$ är ett heltal.
   (g) $M = \mathbb{R}$, $a \sim b$ då och endast då $ab > 0$.
2. Ge i varje exempel ovan då relationen är en ekvivalensrelation en beskrivning av alla ekvivalensklasser genom att välja en representant för varje klass. Försök tolka ekvivalensklasserna geometriskt då sådana tolkningar är möjliga.

Övning C

1. Ge exempel på mängder M och relationer som satisfierar följande villkor:

   (a) reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk,

   (b) reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv,

   (c) transitiv och symmetrisk, men inte reflexiv.

2. Är det sant att reflexivitet i definitionen av en ekvivalensrelation följer ur symmetrin och transitivitet enligt följande resonemang: Låt $x \in M$. $x \sim y$ ger $y \sim x$ eftersom "$\sim$" är symmetrisk. Alltså ger transitiviteten $x \sim x$.

Övning D

1. Vad menas med en partielordningsrelation och en ordningsrelation? Exemplifiera definitionerna!

2. Vilka av följande relationer på de givna mängderna X är partiella ordningsrelationer? Vilka av dem är ordningsrelationer?

   (a) $M = \mathbb{R}$, $a \preceq b$ då och endast då $a^2 \leq b^2$.

   (b) $M = \mathbb{N}$, $a \preceq b$ då och endast då $a^2 | b^2$.

   (c) $M =$ alla reella funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $f \preceq g$ då och endast då $f(x) \leq g(x)$ för varje $x \in \mathbb{R}$.

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas:

Vretblad: 308, 320, 326.