Explorativ övning 4

ÄNDLIGT OCH OÄNDLIGT*

Första delen av övningen handlar om begreppet funktion. Syftet är att bekanta sig med funktionsbegreppet som en parbildning. Vi koncentrerar oss på tre viktiga begrepp:

- injektiv funktion,
- surjektiv funktion,
- bijektiv funktion.

Vi återkommer till funktioner senare i kursen, men nu behöver vi enbart begreppet bijektiv funktion för att jämföra storleken av olika mängder. Man säger att två mängder är lika stora (i matematiska termer: har samma kardinalitet) om det finns en bijektiv funktion mellan dessa mängder. En mängd som är lika stor som de naturliga talen kallas uppräknelig. Att bekanta sig med dessa två begrepp dvs:

- samma kardinalitet
- uppräknelighet

är huvudsyftet med denna övning. Men meningen är också att Du får en bättre förståelse för skillnaden mellan ändliga och oändliga mängder. Vi följer stencilen "Ändligt och oändligt".

I första hand rekommenderas uppgifterna A, B, D, E, G, H, I, K.

Övning A

Vilka av följande mängder är ändliga och vilka är oändliga?

*__MAL200/220, vt 01__

1. Mängden av alla människor som har levt på jorden.
2. Mängden av alla böcker som har skrivits.
3. Mängden av alla ord som har använts i alla böcker som har skrivits.
4. Mängden av alla heltaliga kvadrater dvs 1, 4, 9, 16, ...
5. Mängden av alla primtal.
6. Mängden av alla tal mellan 0 och 1.

Övning B

Låt $X = \{a, b, c\}$ och $Y = \{3, 4, 11\}$.

1. Para ihop elementen i mängderna X och Y så att mot olika $x \in X$ svarar olika $y \in Y$. Skriv ut dessa par.
2. Beteckna med f den funktion som Din parbildning definierar. Ange $f(a), f(b)$ och $f(c)$. Är funktionen f injektiv (surjektiv, bijektiv)? (dessa termer förklaras i stencilen "Ändligt och oändligt" på sid. 2).
3. Ge exempel på en funktion $g : X \to Y$ som inte är injektiv. Är den surjektiv eller bijektiv?
4. Hur många bijektiva funktioner från X till Y kan definieras?

Övning C

Låt $X = \mathrm{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ vara mängden av de naturliga talen och $Y = \mathrm{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ mängden av heltalen.

1. Betrakta funktionen $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, där $f(n) = n + 1$. Ange $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(8)$, $f(102)$. Är funktionen f injektiv? Är den surjektiv eller bijektiv?
2. Betrakta nu $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$, där som ovan $g(n) = n + 1$. Är g injektiv, surjektiv, bijektiv?
3. Kan Du förklara skillnaden mellan f och g? Vad beror den på? (Din förklaring får gärna vara av "intuitiv" karaktär).

Övning D

Vilka av följande funktioner är injektiva, surjektiva, bijektiva?

1. $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, $f(n) = n^2$,
2. $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $g(x) = x^2$,

3. $h : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$, $h(x) = x^3$,
4. $r : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $r(x) = x^3$,
5. $s : \mathrm{Z} \to \{-1, 1\}$, $s(n) = (-1)^n$,
6. $t : A \to B$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $t(x) = \frac{1}{2}x$.

Övning E

1. Visa att alla naturliga tal delbara med 3 bildar en uppräknelig mängd.
2. Visa att alla heltal delbara med 3 bildar en uppräknelig mängd.

   Ledning. Du kan följa samma argument som i stencilen "Ändligt och oändligt" då man visar att de jämna heltalen är uppräkneliga.
3. Låt A vara en uppräknelig mängd. Låt B vara en oändlig delmängd till A (t ex är A alla naturliga tal och B alla jämna naturliga tal). Är B uppräknelig? Bevisa Ditt påstående! Ge några exempel på hur Ditt resultat kan tillämpas.
4. Visa att alla jämna heltal har samma kardinalitet ("är lika många") som alla heltal delbara med 3.

Övning F

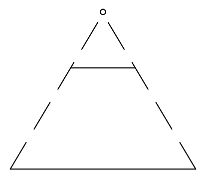
Hilberts[†] hotell. I Hilberts hotell finns oändligt många rum nummrerade 1,2,3,.... Hilbert berättade hur en matematiker löste problemet med sin inkvartering då han fick veta att alla rum var upptagna. Matematikers förslag till ägaren var att flytta gästen i rum nr. 1 till rum nr. 2, gästen i rum nr. 2 till rum nr. 3 osv. På det sättet kunde alla gäster få rum och matematikern kunde ta i besittning rum nr. 1. I verkligheten har hotellet obegränsade möjligheter att ta emot gäster. Försök experimentera!

1. Det kommer en bus med 50 nya gäster. Hur kan de få var sitt rum då alla rum är upptagna?
2. Det kommer oändligt många nya gäster (uppräkneligt många). Hur löser man deras inkvartering i Hilberts hotell?

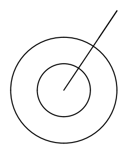
Övning G

1. Visa att två godtyckliga sträckor (med ändpunkterna) har samma kardinalitet (dvs punkterna på dessa sträckor kan paras ihop bijektivt).

[†]David Hilbert (23/1 1862 – 14/2 1943) var en av de mest framstående matematikerna genom tiderna. Hans bidrag till matematiken täcker flera viktiga områden. År 1900 vid Matematikernas världskongress i Paris formulerade Hilbert 23 problem som enligt honom förtjänade stort matematiskt intresse. Dessa problem sysselsate många matematiker under hela seklet, men några väntar fortfarande på sin lösning. Den närmaste världskongressen äger rum i Berlin i augusti 1998.

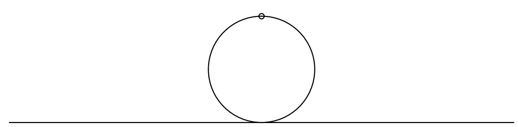


2. Visa att två godtyckliga cirklar (med olika radier) har samma kardinalitet.



3. Visa att en cirkel utan en punkt har samma kardinalitet som en rät linje i planet.

   Ledning. Placera cirkeln på linjen som bilden visar och försök para ihop punkterna på cirkeln med punkterna på linjen.



Övning H

1. Visa att mängden av alla par (a, b) där a och b är naturliga tal, är uppräknelig.

2. Visa att mängden av alla polynom $aX + b$, där a och b är naturliga tal är uppräknelig.

3. Visa att mängden av alla tal $a + b\sqrt{2}$, där a och b är naturliga tal, är uppräknelig.

4. Kan Du se en likhet mellan alla uppgifter ovan (i denna övning)?

5. Låt A och B vara två uppräkneliga mängder. Visa att mängden $A \times B$ av alla par (a, b), där $a \in A$ och $b \in B$ också är uppräknelig.

   Ledning. Du kan resonera på samma sätt som i beviset för att de (positiva) rationella talen är uppräkneliga

Övning I

1. Låt A vara mängden av alla möjliga följder

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

där varje a_i är lika med antingen 0 eller 1. Visa att mängden A inte är uppräknelig.

Ledning. Uppgiften är ganska svår, men lösningen är enklare än beviset att de reella talen bildar en icke–uppräknelig mängd i stencilen "Ändligt och oändligt". Du kan härma beviset i stencilen. Antag att det går att skriva ut alla följder av 0 och 1:

$$\begin{array}{c} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ \ldots \end{array}$$

Konstruera därefter en följd som med all säkerhet inte finns bland de utskrivna.

Övning J

För några år sändes radioprogrammet "Unga snillar spekulerar". Man frågade några barn varför det är bättre att människor har namn i stället för nummer. Ett av barnen svarade att det är helt omöjligt med nummer eftersom det finns så många människor på jorden att numren skulle inte räcka till. Nu fortsätter vi att spekulera.

1. Låt X beteckna alla människor som har levt, lever och kommer att leva på jorden. Låt oss numrera alla människor i den följd de föddes (låt oss anta att det inte har funnits eller kommer att finnas två människor som föds exakt samtidigt). Man får en funktion $f : X \to \{1, 2, 3, \ldots\}$, där mot en människa svarar dess "ordningsnummer" (uff! möjligen $f(\text{Adam}) = 1$ och $f(\text{Eva}) = 2$ och $f(?) = 3$, $f(\text{Du}) =??$ osv. Har vi en funktion? Är den injektiv? Surjektiv?

2. Ett namn är en ändlig följd av bokstäver i ett alfabet. Antag att vi tillåter alla existerande alfabet. Låt nu Y vara mängden av alla möjliga namn och låt $g : X \to Y$, där $g(x) =$ namnet av x. Är funktionen g injektiv? Går det att definiera g så att den är injektiv?

   Trots allt är det trevligare med namn än med nummer!

Övning K

1. Låt oss betrakta en oändlig trädgård med oändligt många träd som växer längs en rät linje. Motivera att trädmängden är uppräknelig (ge ett recept hur träden kan numreras).

2. Visa att varje mängd av parvis disjunkta sträckor på en rät linje är uppräknelig. Ser Du en likhet med förra uppgiften?

3. Tänk Dig nu en oändlig trädgård med oändligt många träd som växer överallt. Visa att trädmängden är uppräknelig (som ovan ge ett recept hur träden kan numreras).

   Ledning. Uppgiften är ganska svår. Tänk på ett träd som en liten cirkel i planet. Cirkelns centrum (a, b) kan väljas så att a och b är två rationella tal. Därefter kan man utnyttja två tidigare övningar.

Övning L

Två något svårare uppgifter:

1. Visa att en sträcka med ändpunkter har samma kardinalitet som en sträcka utan ändpunkter (eller ett intervall $[a, b]$ har samma kardinalitet som intervallet (a, b) – Du får välja $a = 0$ och $b = 1$).

2. Visa att sträckan $(0, 1)$ har samma kardinalitet som halvlinjen $(1, \infty)$ (alternativt: $(0, \infty)$ eller $(-\infty, 0)$)

   Ledning. Den andra uppgiften är något enklare än den första. Du kan utnyttja t ex funktionen $f(x) = 2^x$

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas:

Vretblad: 3.8 (307)