

1. Låt  $x$  och  $y$  vara godtyckliga icke-negativa reella tal. Bevisa olikheten

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)^2 \leq \frac{x + y}{2}$$

och förklara när vänster- och högerled är lika. Motivera noga varje steg i Ditt bevis.

2. (a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att skriva följande påstående: "För varje reellt tal  $x$  implicerar  $x^2 - 6x + 8 \leq 0$  att  $0 < x \leq 4$ " Är påståendet sant?  
(b) Formulera negationen till påståendet i (a) och avgör om det är sant eller falskt.
3. Låt  $A$ ,  $B$  och  $C$  beteckna mängder. Hur definieras unionen  $A \cup B$ , snittet  $A \cap B$  och differensen  $A \setminus B$ ?  
(a) Är det möjligt att  $A \cup B = A \cap B$ ? Under vilka förutsättningar?  
(b) Ge exempel på tre icke-tomma mängder  $A, B, C$  sådana att  $C \setminus (A \cap B) = C \setminus (A \cup B)$ .
4. (a) Bevisa att de rationella talen bildar en uppräknelig mängd.  
(b) Ge exempel på två oändliga mängder som inte har samma kardinalitet.
5. En talföljd definieras av följande formler  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$  då  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Beräkna  $a_2, a_3, a_4, a_5$  och bestäm en formel som uttrycker  $a_n$  med hjälp av  $n$ . Därefter bevisa Din formel med hjälp av matematisk induktion.
6. Bestäm alla heltaliga lösningar  $(x, y)$  till ekvationen  $3x + 7y = 21$ .
7. Låt  $x, y, d \neq 0$  beteckna heltal. Betrakta påståendet: om  $d \mid xy$  så  $d \mid x$  eller  $d \mid y$ .  
(a) Ge exempel som visar att detta påstående inte gäller.  
(b) Motivera att påståendet är sant då  $d = p$  är ett godtyckligt primtal (ge ett bevis).
8. Lös ekvationen  $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$  och skriv dess rötter på formen  $a + bi$  med reella  $a$  och  $b$ . Tolka lösningarna geometriskt i det komplexa planet.

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 20p.

Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 18 januari. Upplýsningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon fr o m den 18 januari: tel. 772 3509 efter kl. 14.00.