LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN
I MAL 200/220 del 3/1 2001-03-12

1. **Låt a, b vara icke–negativa reella tal. Visa att**

$$\sqrt{(a+1)(b+1)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

När inträffar likheten?

Vi kvadrerar bägge leden i den givna olikheten och får:

$$\sqrt{(a+1)(b+1)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow (a+1)(b+1) \geq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \Leftrightarrow$$

$$ab + a + b + 1 \geq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \Leftrightarrow ab - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{ab} - 1)^2 \geq 0.$$

Den sista olikheten är sann så att den ursprungliga som är ekvivalent med denna också är sann. Likheten gäller då och endast då $(\sqrt{ab} - 1)^2 = 0$, vilket är ekvivalent med att $\sqrt{ab} = 1$ dvs $ab = 1$.

2. **(a) Avgör om följande utsaga:**

$$\forall a, b, d \in \mathbb{N}: \ (d \mid ab \Rightarrow d \mid a \vee d \mid b)$$

är sann eller falsk. Formulera negationen till utsagan ovan så att negationssymbolen inte förekommer i Ditt slutliga svar.

(b) Bevisa att om d är ett primtal så är utsagan i (a) sann.

(a) Utsagan är falsk. Tag t ex $a = 2, b = 3$ och $d = 6$. Då är $6 \mid ab = 6$, men $6 \nmid a = 2$ och $6 \nmid b = 3$.

Negationen av utsagan lyder:

$$\neg(\forall a, b, d \in \mathbb{N}: \ (d \mid ab \Rightarrow d \mid a \vee d \mid b)) \Leftrightarrow$$

$$\exists a, b, d \in \mathbb{N}: \ (d \mid ab \wedge d \nmid a \wedge d \nmid b).$$

Vi utnyttjar här två logiska lagar: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ och de Morgans lag $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

(b) Det är en teorifråga – se stencilen "Delbarhet och primtal" eller Vretblads bok.

3. **(a) Låt A vara mängden av alla heltal delbara med 4, och B mängden av alla jämna heltal. Ange elementen i mängderna $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ och $B \setminus A$.**

(b) Låt C beteckna en godtycklig mängd. Är det sant att $C \setminus B \subseteq C \setminus A$? Motivera svaret!

(a) Vi har $A = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12 \ldots\}$ och $B = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots\}$. Notera att $A \subseteq B$. Man får $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{\pm 2, \pm 6, \pm 10 \ldots\}$ = alla jämna heltal som inte är delbara med 4.

(b) Inklusionen gäller för alla C ty $x \in C \setminus B \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin B \Rightarrow x \in C \wedge x \notin A \Leftrightarrow x \in C \setminus A$ eftersom om $x \notin B$ så $x \notin A$ då $A \subseteq B$.

4. **Bevisa att talet $\sqrt{12}$ inte är rationellt.**

Låt oss anta motsatsen dvs att $\sqrt{12}$ är rationellt. Då är $\sqrt{12} = \frac{m}{n}$, där m, n är positiva heltal. Eftersom $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ så innebär detta att $\sqrt{3} = \frac{m}{2n}$ är rationellt, vilket är en motsägelse ty, som vi vet, $\sqrt{3}$ är inte ett rationellt tal.

Det sista påståendet visas precis på samma sätt som påståendet om att $\sqrt{2}$ inte är rationellt (se Vretblads bok eller stencilen om "Induktion och deduktion").

5. **(a) Förklara vad man menar då man säger att två mängder A och B har samma kardinalitet. Exemplifiera Din definition.**

(b) Betrakta mängden av alla par (a, b), där a och b är positiva heltal sådana att $2 \mid a$ och $3 \mid b$. Motivera att denna mängd är uppräknelig.

(a) Se stencilen "Ändligt och oändligt" (det är en teorifråga).

(b) Alla par (a, b) sådana att a är ett positivt heltal delbart med 2 och b är ett positivt heltal delbart med 3 kan ordnas enligt tabellen nedan och därefter numreras i enlighet med pilarnas väg dvs $(2, 3)$ med 1, $(2, 6)$ med 2, $(4, 3)$ med 3 osv.

$$
\begin{tikzcd}
(2,3) \arrow[r] & (2,6) \arrow[dl] & (2,9) \arrow[r] & (2,12) \arrow[dl] & \cdots \\
(4,3) \arrow[d] & (4,6) \arrow[ur] & (4,9) \arrow[dl] & (4,12) & \cdots \\
(6,3) \arrow[ur] & (6,6) \arrow[dl] & (6,9) & (6,12) & \cdots \\
(8,3) & (8,6) & (8,9) & (8,12) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Detta visar att paren bildar en uppräknelig mängd.

6. **Bevisa med hjälp av matematisk induktion att**

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1 + (2n-1) \cdot 3^n}{4}$$

för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Först kontrollerar vi likheten för $n = 1$: VL $= 1$, och HL $= \frac{1+1\cdot 3^0}{4} = 1$ ty $3^0 = 1$.

Nu antar vi att likheten gäller då $n = k \geq 1$ dvs

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + k \cdot 3^{k-1} = \frac{1 + (2k-1) \cdot 3^k}{4}$$

och visar att den gäller då $n = k + 1$ dvs

$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+k\cdot 3^{k-1}+(k+1)\cdot 3^k = \frac{1 + (2(k+1)-1) \cdot 3^{k+1}}{4} = \frac{1 + (2k+1) \cdot 3^{k+1}}{4}.$$

Bevis:

$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+k\cdot 3^{k-1}+(k+1)\cdot 3^k=\frac{1+(2k-1)\cdot 3^k}{4}+(k+1)\cdot 3^k=$$

$$\frac{1+(2k-1)\cdot 3^k+4(k+1)\cdot 3^k}{4}=\frac{1+(6k+3)\cdot 3^k}{4}=\frac{1+(2k+1)\cdot 3^{k+1}}{4}.$$

Detta visar likheten för $n=k+1$ och därmed att olikheten gäller för alla naturliga tal $n=1,2,\ldots$ i enlighet med induktionsprincipen.

7. **Följande uppgift kommer från en bok skriven av L. Euler för nära 250 år sedan. En bonde köper kor och hästar för 1770 kronor. Han betalar 21 kronor för en ko och 31 kronor för en häst. Hur många kor och hur många hästar köper bonden?**

Vi måste lösa ekvationen $21x+31y=1770$ i icke–negativa heltal x,y. x betecknar antalet kor, och y antalet hästar. Vi behöver en partikulär lösning. En del personer har gissat $x_0=40$ och $y_0=30$, men låt oss anta att vi inte lyckas gissa denna lösning. Då tar vi ekvationen $21x+31y=1$ och gissar lätt att $x=3$, $y=-2$ är en lösning. Alltså är $x_0=3\cdot 1770=5310$ och $y_0=-2\cdot 1770=-3540$ en (partikulär) lösning till vår ekvation (inte lika enkel, men det har ingen större betydelse). Nu har vi $21x+31y=21x_0+31y_0$ så att $21(x-x_0)=31(y_0-y)$. Denna likhet ger att 31 dividerar $x-x_0$ så att $x-x_0=31k$, k ett heltal. Alltså är $21\cdot 31k=31(y_0-y)$, vilket ger $y_0-y=21k$. Alla lösningar till den ursprungliga ekvationen ges av $x=5310+31k$, $y=-3540-21k$, där k är ett heltal. Vi måste bestämma alla lösningar med $x\geq 0$ och $y\geq 0$.

Vi har $x=5310+31k\geq 0$ precis då $k\geq -171$ och $y=-3540-21k\geq 0$ precis då $k\leq -169$. Alltså har vi tre möjligheter för $k=-169,-170,-171$. Dessa tre värden ger $x=71,y=9$ eller $x=40,y=30$ eller $x=9,y=51$. Vi har alltså tre möjliga svar (antal kor och hästar).

8. **(a) Låt z vara ett komplext tal. Vad menas med det konjugerade talet $\bar{z}$? Bevisa att talet $z+\bar{z}$ alltid är reellt och tolka geometriskt detta påstående (först tolka geometriskt z och $\bar{z}$).**

(b) Beräkna

$$\left(\frac{6+8i}{7+i}\right)^{12}+\left(\frac{6-8i}{7-i}\right)^{12}$$

och skriv resultatet på formen $a+bi$.

(a) Om $z=a+bi$ så är $\bar{z}=a-bi$, vilket innebär att $z+\bar{z}=2a$ är ett reellt tal. Den geometriska tolkningen finns i både Vretblads bok och i stencilen om komplexa tal (den geometriska tolkningen av summan av två komplexa tal).

(b) Vi har $\frac{6+8i}{7+i}=\frac{(6+8i)(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\frac{50+50i}{50}=1+i$. På samma sätt får vi att $\frac{6-8i}{7-i}=1-i$ (det konjugerade talet till det första). Alltså måste vi beräkna $(1+i)^{12}+(1-i)^{12}$. Observera att $(1+i)^2=2i$ och $(1-i)^2=-2i$. Alltså är

$$(1+i)^{12}+(1-i)^{12}=((1+i)^2)^6+((1-i)^2)^6=(2i)^6+(-2i)^6=-64-64=-128$$

ty $i^6=i^2=-1$.