Tentamensskrivning i MAL 200, del 4

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

Med lösningsförslag

1. Ge exempel på, eller visa att det inte existerar:

   a) två rationella tal vars summa är irrationell;

   b) två irrationella tal vars summa är irrationell;

   c) två irrationella tal vars summa är rationell.

   Lösning: a) Summan av två rationella tal är alltid rationell: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. b) Ex: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. c) Ex: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$.

2. Faktorisera polynomet x^4-x^2-6 i irreducibla faktorer

   a) i $\mathbb{Q}[x]$;

   b) i $\mathbb{R}[x]$;

   c) i $\mathbb{C}[x]$.

   Lösning: a) $(x^2+2)(x^2-3)$. b) $(x^2+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. c) $(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

3. Bestäm för varje operation $*$ om den är associativ och/eller kommutativ eller inte på angiven mängd.

   a) $a*b=a$ på mängden av heltal.

   b) $a*b=a$ på mängden $\{0\}$.

   c) $z*w=|z+\overline{w}|$ på mängden av komplexa tal. (Om $a,b\in\mathbb{R}$ och $i^2=-1$ så är $\overline{a+bi}=a-bi$ och $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.)

   Lösning:

   a) Associativ, $(a*b)*c=a*c=a$ och $a*(b*c)=a*b=a$. Ej kommutativ, ex: $0*1=0$, medan $1*0=1$

   b) Associativ enligt ovan. Kommutativ, eftersom det bara finns en 'produkt': $0*0=0$.

   c) Ej associativ, ex: $(-1*1)*1=0*1=1$, medan $(-1)*(1*1)=(-1)*\sqrt{2}=|-1+\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1\neq 1$. $(a+bi)*(c+di)=|a+bi+c-di|=\sqrt{(a+c)^2+(b-d)^2}$ och $(c+di)*(a+bi)=|c+di+a-bi|=\sqrt{(c+a)^2+(d-b)^2}=\sqrt{(a+c)^2+(b-d)^2}$ för alla $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, så $*$ är kommutativ.

4. Nedan definieras tre relationer på mängden av de komplexa talen. För var och en, bestäm om relationen är en ekvivalensrelation eller ej. Om så är fallet, beskriv ekvivalensklasserna, annars, tala om vilken eller vilka av egenskaperna som brister.

   a) $z\sim w$ om $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} w$;

   b) $z\sim w$ om $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re} w$;

   c) $z\sim w$ om $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re} w$ eller $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im} w$.

   (Om $z=a+bi$ där $a,b\in\mathbb{R}$ och $i^2=-1$, så är $\operatorname{Re} z=a$ och $\operatorname{Im} z=b$.)

   Lösning:

a) Ej reflexiv, ex: $\operatorname{Re} 1 = 1 \neq 0 = \operatorname{Im} 1$; ej symmetrisk, ex: $1 \sim 1 + i$, men $1 + i \not\sim 1$; ej transitiv, ex: $1 \sim i$ och $i \sim 2$, men $1 \not\sim 2$.

b) Ekvivalensrelation. För varje reellt tal a har vi en ekvivalensklass

$$[a] = \{a + bi : b \in \mathbb{R}\},$$

bestående av alla komplexa tal med samma realdel som a.

c) Reflexiv och symmetrisk, men ej transitiv, ex: $1 \sim 1 + i$ och $1 + i \sim i$, men $1 \not\sim i$.

5. Visa att om $\triangle ABC$ är en triangel och D en punkt mellan A och B så att linjen CD är en bisektris till vinkeln $\angle ACB$, så gäller

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}. \qquad \text{(Bisektrissatsen)}$$

(Rita figur.) Satser som kan användas är tex satser om vinklar vid parallella linjer, basvinkelsatsen, och topptriangelsatsen.

Lösning: Se kompendiet *Euklidisk geometri*

6. Låt $\triangle ABC$ vara en triangel så att $|AB| = 2|AC|$. Låt D vara mittpunkten på sidan AB och E en punkt på sidan BC så att AE skär CD i mittpunkten. Hur lång är sträckan CE i förhållande till sidan BC? (Geometriskt bevis krävs. Alla i kursen givna satser kan användas utan bevis.)

Lösning: $|AD| = |AC|$, så vinklarna $\angle ADC$ och $\angle ACD$ är lika stora enligt basvinkelsatsen. AE är alltså en bisektris till vinkeln $\angle BAC$. Bisektrissatsen ger då att

$$\frac{|EB|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|AC|} = 2.$$

Alltså är

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|CE|}{|CE| + |BE|} = \frac{|CE|}{|CE| + 2|CE|} = \frac{1}{3}.$$

7. a) Vilka rester i $\mathbb{Z}_{10}$ har invers? Vad är deras inverser? Motivera att de andra saknar invers.

b) Ge en allmän regel för alla heltal $n \geq 2$ för vilka rester i $\mathbb{Z}_n$ som har invers, och bevisa den.

Lösning:

a) Rester med invers är precis de som är relativt prima med 10 (se (b)), dvs $1, 3, 7, 9$. $1 \cdot 1 = 1$, $3 \cdot 7 = 21 \equiv 1$ och $9 \cdot 9 \equiv (-1) \cdot (-1) \equiv 1$. Alltså är $1^{-1} = 1$, $3^{-1} = 7$, $7^{-1} = 3$ och $9^{-1} = 9$ i $\mathbb{Z}_{10}$.

b) r har invers i $\mathbb{Z}_n$ om och endast om $SGD(r, n) = 1$. Bevis, se kompendiet *Talsystem och restaritmetiker*.

8. På en arbetsplats med 9 män och 5 kvinnor skall det bildas ett korpfotbollslag med 7 spelare. På hur många sätt kan det väljas

a) om det inte finns några villkor på könssammansättningen;

b) om det skall finnas precis 3 damer och 4 herrar i laget;

c) om det ska finnas *minst* 3 damer i laget?

I (a) och (c) räcker det att uttrycka antalet tex med fakulteter, i (b), räkna ut talet explicit. (Jo, det går bra utan miniräknare.)

Lösning:

a)

$$\binom{14}{7} = \frac{14!}{7! \cdot 7!}$$

Observera att om man skiljer på lag bestående av samma spelare i olika ordning blir det $14!/7!$ möjligheter. Att räkna dem som olika leder ofta till onaturliga modeller i uppgift (b) och(c).

b)

$$\binom{5}{3}\binom{9}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 1260$$

c)

$$\binom{5}{3}\binom{9}{4} + \binom{5}{4}\binom{9}{3} + \binom{5}{5}\binom{9}{2}.$$

* * *

Alla svar skall motiveras väl!

Var och en av de 8 uppgifterna ger maximalt tre poäng. För godkänt krävs 10 poäng, och för väl godkänt 20 poäng. Skrivningarna är förhoppningsvis färdigrättade den 14/6 och kan därefter hämtas på CTH-expeditionen, Matematiskt centrum.

sk