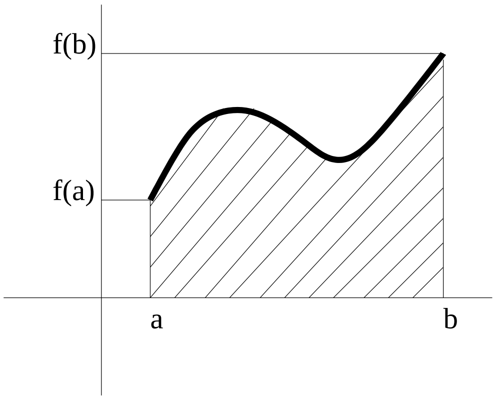
Kap. 5. Integraler

Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad positiv funktion. Vi "definierar" integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ som arean under grafen:



Problemet med den här definitionen är att arean är bara definierad för polygoner. För andra figurer hittar man arean genom en gränsvärdesprocess. Men så definieras också integralen, även för funktionen som inte är positiva. Vanligtvis definierar man arean under grafen som $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ur vår intuition om area kan vi härleda följande egenskaper:

I 1: $\displaystyle\int_a^b 1\,dx = b - a$

I 2: $\displaystyle\int_a^b Af(x) + Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$

I 3: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ om $f(x) \le g(x)$ for $x \in [a,b]$

I 4: $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

I 5: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Speciellt gäller att $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. För en negativ funktion är integralen minus arean över grafen.
Egenskap I 4 gäller för alla värden av a, b och c om vi definierar $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
Observera att x är en intern variabel som kan ersättas med en annan symbol: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

Vi skall senare definiera integralen och visa att den uppfyller egenskaper I 1 till I 5. Varje kontinuerlig funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är integrerbar. Men även många ej kontinuerliga funktioner är integrerbara. Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \text{ är rationellt,} \\ 0, & \text{om } x \text{ är irrationellt,} \end{cases}$$

är ett exempel där integralen inte existerar.

Integration är ett slags invers till derivering. Vi skall nu precisera detta.

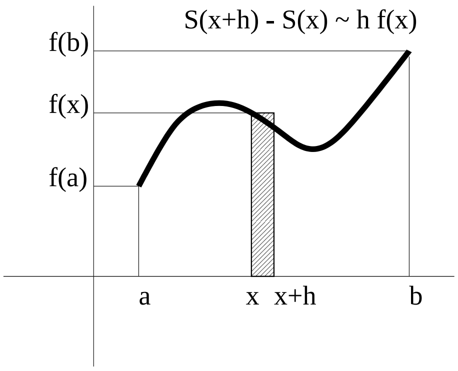
Definition. Låt $f(x)$ och $F(x)$ vara funktioner. Om $F(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ och $F'(x) = f(x)$ för alla $a < x < b$, så kallas $F(x)$ en *primitiv funktion* till $f(x)$ i intervallet $[a,b]$.

Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ är $F(x)+C$ också en primitiv funktion, där C är en godtycklig konstant. Andra primitiva funktioner finns inte, ty två funktioner med samma derivata skiljer sig åt med en konstant.

Sats. *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Funktionen $S\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt \,,$$

är en primitiv funktion till $f(x)$.



Bevis. Låt $x \in]a,b[$. Vi beräkna $S(x+h) - S(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Detta gäller även om $h < 0$. Eftersom f är kontinuerlig finns det för varje $\varepsilon > 0$ ett δ sådant att $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ för alla $0 < |h| < \delta$. Om $0 < h < \delta$ gäller att

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dt \right|$$
$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \le \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \le \frac{h\varepsilon}{h} = \varepsilon \,.$$

Liksom har vi

$$\begin{aligned}\left|\frac{S(x-h)-S(x)}{-h}-f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(x)\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} (f(t)-f(x))\,dt\right| \le \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} |f(t)-f(x)|\,dt \le \frac{h\varepsilon}{h}=\varepsilon\ .\end{aligned}$$

Enligt gränsvärdesdefinitionen är nu $S'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)$. $\square$

Integralkalkylens huvudsats. *Om $f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ och om F är en primitiv funktion till $f(x)$ i $[a,b]$ gäller*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b)-F(a)\ .$$

Bevis. Formeln gäller för $S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, ty $S(a)=0$, $S(b)=\int_a^b f(t)\,dt$. Eftersom $(S-F)'(x)=f(x)-f(x)=0$ är $S(x)-F(x)$ konstant, dvs $S(x)=F(x)+C$ för någon konstant C. För $x=a$ har vi $S(a)=0=F(a)+C$, så $C=-F(a)$ och $\int_a^b f(x)\,dx=S(b)=F(b)-F(a)$. $\square$

En vanlig beteckning för mängden av alla primitiva funktioner till f är $\int f(x)\,dx$. Den kallas för en *obestämd integral*, medan $\int_a^b f(x)\,dx$ är en *bestämd integral*. Om uppgiften är: beräkna $\int f(x)\,dx$, så är svaret mängden av alla primitiva funktioner, som betecknas med $F(x)+C$, där $F(x)$ är en primitiv funktion.

Exempel.
Beräkna $\int x\,dx$.
Svar: vi observerar att $\frac{d}{dx}x^2=2x$, så $\frac{1}{2}x^2$ är en primitiv funktion till funktionen x och $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$.
Beräkna $\int_0^1 x\,dx$.
Svar: $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

Om vi läser listan på derivator av elementära funktioner 'baklänges' får vi direkt en lista med obestämda integraler:

$$\begin{aligned}\int x^a\,dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1}+C \\ \int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x|+C \\ \int e^x\,dx &= e^x+C \\ \int \sin x\,dx &= -\cos x+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \cos x\,dx &= \sin x + C\\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + C\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C
\end{aligned}$$

Deriveringsregler ger upphov till två viktiga beräkningsmetoder. Från produktregeln $(fg)' = f'g + fg'$ får vi följande sats.

Partialintegration. *Om f och g är deriverbara funktioner och funktionerna f' och g' är kontinuerliga, så gäller*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = fg - \int f(x)g'(x)\,dx$$

och speciellt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ .$$

Exempel. Beräkna $\int xe^x\,dx$.
Vi uppfattar e^x som derivatan till e^x och får $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$.

Exempel. Beräkna $\int \ln x\,dx$.
Vi skriver $\ln x = 1\cdot \ln x$, där $1 = \frac{d}{dx}x$. Vi får $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$.

Exempel. Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$.
Genom partialintegration får vi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$. Den återstående integralen beräknar vi med en partialintegration till: $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 2x\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \pi + 2\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 2$.

Exempel. Beräkna $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.
Här räknar vi tills vi har den ursprungliga integralen tillbaka, men med ett minustecken: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int\frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Därför är $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$.

Exempel. Funktionerna $\cos^k x$, $\sin^k x$ för $k = 2, 3, \ldots$.
Partialintegration ger

$$\begin{aligned}\int \cos^k x\,dx &= \cos^{k-1} x \sin x + (k-1)\int \cos^{k-2} x \sin^2 x\,dx \\ &= \cos^{k-1} x \sin x + (k-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{k-2} x\,dx\end{aligned}$$

Om vi löser ekvationen för $\int \cos^k x\,dx$ får vi rekursionsformeln

$$\int \cos^k x\,dx = \frac{1}{k}\cos^{k-1} x \sin x + \frac{k-1}{k}\int \cos^{k-2} x\,dx$$

och på samma sätt

$$\int \sin^k x\,dx = -\frac{1}{k}\sin^{k-1} x \cos x + \frac{k-1}{k}\int \sin^{k-2} x\,dx$$

Med $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$ och $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ får vi de bestämda integraler

$$\begin{aligned}c_{2n} &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot \ldots \cdot \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ c_{2n+1} &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot \ldots \cdot \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Wallis produkt

$$w_n := \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot \ldots \cdot \frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = p_n^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$$

kan nu skrivas som $w_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$. Vi beräknar $\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$. På $[0, \frac{\pi}{2}]$ gäller $\cos^{2n} \geq \cos^{2n+1} \geq \cos^{2n+2}$ och därmed $c_{2n} \geq c_{2n+1} \geq c_{2n+2}$. Vi får

$$1 \geq \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

som visar att $\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1$ och $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$.

Den andra viktiga integrationsmetoden får vi ur kedjeregeln.

Variabelsubstitution. *Låt F vara en primitiv funktion till den kontinuerliga funktionen f. Låt $y = g(x)$ vara deriverbar och g' kontinuerlig. Då är $F(g(x))$ en primitiv funktion till $f(g(x))\cdot g'(x)$ och*

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{y=g(a)}^{y=g(b)} f(y)\,dy\,.$$

Bevis. Första påståendet följer ur kedjeregeln. Huvudsatsen ger att båda sidor av ekvationen har samma värde $F(g(b)) - F(g(a))$. $\square$

Exempel. Beräkna $\int x\sqrt{x-1}\,dx\,,\ x \geq 1\,.$
För att bli av med roten substituerar vi $t = \sqrt{x-1}$. Då är $x = t^2+1$ och $dx = 2t\,dt$. Vi får $\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (t^2+1)t\cdot(2t)\,dt = 2\int t^4+t^2\,dt = \frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C = (\frac{2}{5}x+\frac{4}{15})(x-1)\sqrt{x-1}+C\,.$

Exempel. Beräkna $\int_1^6 x\sqrt{x-1}\,dx\,.$
Vi har redan beräknat den obestämda integralen. Så $\int_1^6 x\sqrt{x-1}\,dx = (\frac{2}{5}x+\frac{4}{15})(x-1)\sqrt{x-1}|_1^6 = (\frac{12}{5}+\frac{4}{15})5\sqrt{5}-0 = \frac{40}{3}\sqrt{5}.$
Alternativt kan vi beräkna de nya integrationsgränser: $t=0$ om $x=1$, $t=\sqrt{5}$ om $x=6$. Vi får med samma substitution $\int_1^6 x\sqrt{x-1}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{5}} t^4+t^2\,dt = \frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3|_0^{\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}+\frac{10}{3}\sqrt{5} = \frac{40}{3}\sqrt{5}.$

Exempel. Beräkna $\int xe^{x^2}\,dx\,.$
Här använder vi substitutionsformeln från vänster till höger: vi sätter $x^2 = t$ och beräknar $dt = 2x\,dx$, så $x\,dx = \frac{1}{2}dt$. Vi får $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t+C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C\,.$
Genom substitutionen uppfattar vi t som funktion av x. Vi kan utelämna t och skriva $x\,dx = \frac{1}{2}dx^2$. Då löser vi uppgiften på följande sätt: $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$. Fördelen med skrivsättet är att man slippar beräkna nya gränser i bestämda integraler. Så är $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2}|_0^2 = e^4-1\,.$
Med explicit variabelbyte räknar man $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t|_0^4 = e^4-1\,.$

Exempel.
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|+C\,.$$

Exempel. Vi skall nu använda integralräkning för att härleda Leibniz formel för $\frac{\pi}{4}$.

Sats. *För* $|x| \leq 1$ *gäller*
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\dots$$

Bevis. Vi har $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^\infty (-1)^k t^{2k}\,dt$. I allmänhet får man inte utan vidare byta två gränsvärdesprocesser, d v s integrera under sumtecknet. Vi måste visa att $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ konvergerar mot $\arctan x$. Vi har
$$\left|\arctan x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| = \left|\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt - \sum_{k=0}^n \int_0^x (-1)^k t^{2k}\,dt\right|\,.$$

Nu finns det bara ändligt många termer, så vi kan byta summa och integral. Vi kommer fram till

$$\left|\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^x \frac{1-(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| = \left|\pm\int_0^x \frac{t^{2k+2}}{1+t^2}\,dt\right|$$
$$\leq \left|\pm\int_0^x t^{2n+2}\,dt\right| = \frac{|x^{2n+3}|}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

där sista olikhet gäller om $|x| \leq 1$. $\square$

Sätter vi in $x = 1$ i serien får vi Leibniz formel för π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

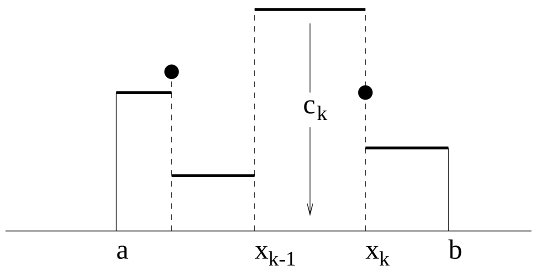
Formeln är knappast lämpligt för att beräkna π, då serien mycket långsamt konvergerar. Den engelska astronomen John Machin beräknade redan i 1706 hundra decimaler till π med formeln

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

och arctan serien.

Vi kommer nu till integralens definition. Först betraktar vi funktioner där arean under grafen bara består av rektanglar.

Definition. En trappfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är en styckvis konstant funktion, dvs det finns en indelning $D\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ och tal c_i sådana att $\varphi(x) = c_i$ för $x_{i-1} < x < x_i$.



Observera att funktionsvärdena $\varphi(x_i)$ är godtyckliga. Summan av två trappfunktioner är igen en trappfunktion.

Definition. Låt $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en trappfunktion med avseende på en indelning D. Vi definierar

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})\ .$$

Integralen beror inte på indelningen. Låt $D'\colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ vara en annan indelning med $\varphi(t) = c_i'$ på $]t_{i-1}, t_i[$. Som förkortning skriver vi $\sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_D \varphi$. Vi vill visa att $\int_{D'} \varphi = \int_D \varphi$. Låt D^* vara indelningen med $\{x_0, \ldots, x_n, t_0, \ldots, t_m\}$ som mängd av delningspunkter. Då vill vi visa att $\int_{D'} \varphi = \int_{D^*} \varphi = \int_D \varphi$. Det räcker alltså att visa $\int_{D'} \varphi = \int_D \varphi$ i fallet där $\{x_0, \ldots, x_n\}$ är en delmängd till $\{t_0, \ldots, t_m\}$. Vi kan även lägga in en kedja av indelningar, där vi har varje gång bara en delningspunkt extra. Vi är alltså i situationen dår vi har en ny punkt t mellan två punkter x_i och x_{i+1} för ett visst i. Innan har vi en summand $c_i(x_{i+1} - x_i)$, nu får vi två summander $c_i(t - x_i) + c_i(x_{i+1} - t)$ och därmed ändras integralen inte.

Lemma. *Den så definierade integralen för trappfunktioner uppfyller egenskaper* I 1 *till* I 5.

Vi vill nu integrera allmännare funktioner $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Det är inte alltid möjligt, men vi kan göra detta om vi kan approximera f med trappfunktionen.

Definition. Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ och $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara begränsade funktioner. Avståndet mellan f och g är

$$||f - g|| := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \,.$$

Avståndet mellan två funktioner uppfyller triangelolikheten:
$||f - h|| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - h(x)| = ||f - g|| + ||g - h||$.

Definition. Antag att det finns en följd φ_n av trappfunktioner på $[a,b]$ med $||f - \varphi_n|| \to 0$ då $n \to \infty$. Då sätter vi

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \,.$$

För att visa att integralen är väldefinierad måste vi bevisa att gränsvärdet existerar och inte beror på val av följden. Vi beräknar först

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_m(x)\,dx\right| &\le \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|\,dx \\ &\le (b-a)||\varphi_n - \varphi_m|| \le ||\varphi_n - f|| + ||f - \varphi_m||\end{aligned}$$

och denna uttryck går mot 0 om $m, n \to \infty$.

Vi behöver en sats om följder.

Sats. *Varje följd a_n har en monoton delföljd.*

Bevis. Vi säger att följden har en spets vid index k om $a_k \geq a_n$ för alla $n \geq k$. Om det finns oändligt många spetsar, bilder de en monoton avtagande delföljd. Annars finns det bara ändligt många spetsar (eller inte alls); antag att den sista ligger vid k. Vi sätter $a_{n_0} := a_{k+1}$. Eftersom a_{n_0} inte är en spets, finns det ett $n_1 > n_2$ med $a_{n_1} > a_{n_2}$, o s v. Induktiv hittar man alltså en monoton växande delföljd a_{n_k}. $\square$

Ur talföljden $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ kan vi välja en monoton delföljd, som har enligt vår axiom för reella tal ett gränsvärde I. Eftersom avståndet mellan tal i följden går mot 0, är I också gränsvärdet till den ursprungliga följden.

Om ψ_n är en annan följd av trappfunktioner med $||f - \psi_n|| \to 0$ då $n \to \infty$, konkluderar vi på samma sätt att $|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx - \int_a^b \psi_n(x)\,dx| \leq ||\varphi_n - f|| + ||f - \varphi_n|| \to 0$, då $n \to \infty$, så $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx$.

Det återstår att bestämma vilka funktioner kan approximeras med trappfunktioner.

Definition. En funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kallas *regelfunktion* om f har en högergränsvärde i varje punkt $x \in [a,b[$ och en vänstergränsvärde i varje punkt $x \in]a,b]$.

Exempel.
1) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinuerlig.
2) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ styckvis kontinuerlig: det finns tal $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ och kontinuerliga funktioner $f_i\colon [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x) = f_i(x)$ för $x_{i-1} < x < x_i$.
3) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton.
4) funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ och $f(x) = 1/x$ för $x > 0$, är inte en regelfunktion, ty högergränsvärdet i $x = 0$ inte existerar.

Om det finns ett $\varepsilon > 0$ och en trappfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ med $||f - \varphi|| \leq \varepsilon$, d v s $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ för alla $x \in [a,b]$, kallas φ för en ε-approximation till f.

Sats. *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en regelfunktion. För varje $\varepsilon > 0$ finns det en ε-approximation φ till f.*

Bevis. Antag att för en viss $\varepsilon > 0$ en ε-approximation inte existerar. Vi konstruerar nu en intervallinkapsling $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots$ med $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$ och egenskapen att för varje n en ε-approximation till f inte existerar på intervallet $[a_n, b_n]$. Vi sätter $[a_0, b_0] = [a, b]$ och konstruerar de följande intervall induktivt genom halvering: om $[a_n, b_n]$ är redan definierad och $m_n = (a_n + b_n)/2$ är dess midpunkt, så existerar en ε-approximation till f inte på minst en av de två intervallen $[a_n, m_n]$, $[m-, b_n]$ och som $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ väljer vi en sådan hälft. Betrakta nu punkten ξ och låt c_h, c_v vara höger- och vänstergränsvärden i ξ. Det finns ett tal $\delta > 0$ så att $|f(x) - c_v| \leq \varepsilon$ för

$\xi - \delta \le x < \xi$ och $|f(x) - c_h| \le \varepsilon$ för $\xi < x \le \xi + \delta$. Om N är tillräckligt stort, är $[a_N, b_N] \subset [\xi - \delta, \xi + \delta]$ och trappfunktionen definierad som

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_v, & x \in [a_N, \xi[\\ f(\xi), & x = \xi \\ c_h, & x \in]\xi, b_N] \end{cases}$$

är en ε-approximation, som motsäger konstruktionen av $[a_n, b_N]$. □

För att integrera en regelfunktion räcker det nu att välja en $\frac{1}{n}$-approximation φ_n för varje n.

Satsen omvändning gäller också: om f kan approximeras med trappfunktioner φ_n, då är f en regelfunktion. Vi visar existensen av högergränsvärdet i en godtycklig punt $x_0 \in [a, b[$. Varje trappfunktion φ_n här en högergränsvärde c_n i x_0. Låt c vara gränsvärdet av en konvergent delföljd: $c := \lim_{k\to\infty} c_{n_k}$. Låt $\varepsilon > 0$. Välj n så stor att både $|c - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ och $||f - \varphi_n|| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Eftersom c_n är φ_n:s högergränsvärde finns det ett $\delta > 0$ med $|c_n - \varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ för $x_0 < x < x_0 + \delta$. För sådana x gäller att $|f(x) - c| \le |f(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - c_n| + |c_n - c| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Detta visar att $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = c$.

Slutligen visar vi att egenskaper I 1 till I 5 är uppfyllda.

Sats. *Integralen för regelfunktioner uppfyller egenskaper I 1 till I 5.*

Bevis. I 1, I 2 och I 4 följer lätt ur korresponderande egenskaper för trappfunktioner.

För att visa I 3: $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ om $f(x) \le g(x)$ for $x \in [a, b]$, observerar vi att vi kan alltid approximera f med trappfunktioner φ_n så att $\varphi_n(x) \le f(x)$ för alla $x \in [a, b]$. Vi definierar $\varphi^-(x) := \varphi_n(x) - ||f - \varphi_n||$. Då gäller $|f(x) - \varphi_n^-(x)| \le 2||f - \varphi_n||$. Så φ_n^- är en följd av trappfunktioner med $||f - \varphi_n^-|| \to 0$ då $n \to \infty$. Liksom kan vi approximera $g(x)$ uppifrån med $\psi_n^+(x)$. Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n^-(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n^+(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

För I 5 observerar vi att $|f(x)|$ är igen en regelfunktion, ty hoger- och vänstergränsvärden existerar. Om $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$ finns det ingenting att visa, eftersom $\int_a^b |f(x)|\,dx \ge 0$. Om $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ är $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b f(x)\,dx$. Ur $f(x) \le |f(x)|$ och I 3 får vi $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. Härmed har vi visat att $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

Tillämpning.

Sats. *Talet π^2 och därmed också π är irrationellt.*

Bevis. Betrakta integralen

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \, dx \ .$$

Vi har

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

och I_1 beräknas genom att två gånger partialintegrera:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2) \cos x \, dx &= (\frac{\pi^2}{4} - x^2) \sin x \Big|_+^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx \\ &= -2x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2 \ . \end{aligned}$$

Vi härledar en rekursionsformeln för I_n:

$$\begin{aligned} I_n &= (\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^n \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2xn(\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^{n-1} \sin x \, dx \\ &= -2xn(\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^{n-1} \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2n(\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^{n-1} - 4n(n-1)x^2(\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^{n-2}] \cos x \, dx \\ &= 2n(2n-1)I_{n-1} - n(n-1)\pi^2 I_{n-2} \ . \end{aligned}$$

Varje I_n kan nu beräknas, men för oss räcker det att I_n har formen $I_n = n!P(\pi^2)$ där $P(\pi^2)$ är en polynom i π^2 med heltalkoefficienter av grad högst n, ett påstående som vi inte heller visar.

Antag nu att $\pi^2 = \frac{a}{b}$. Vi sätter $J_n := I_n b^n/n!$. Vi visar nu att J_n är ett heltal. Genom att multiplicera rekursionsformeln för I_n med $b^n/n!$ får vi

$$J_n = 2(2n-1)bJ_{n-1} - abJ_{n-2} \ .$$

Vidare är $J_0 = I_0 = 1$ och $J_1 = bI_1 = 2b$. Induktivt följer nu att J_n är ett heltal.

Å andra sidan kan vi uppskatta integralen. Eftersom integranden är positiv på $]0, \frac{\pi}{2}[$, är $I_n > 0$. Också gäller

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \, dx < (\frac{\pi^2}{4})^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = (\frac{\pi^2}{4})^n$$

och därför, om $\pi^2 = \frac{a}{b}$,

$$0 < J_n < \frac{a^n}{4^n n!} < 1, \quad \text{om } n \text{ stor}$$

vad som motsäger att J_n är ett heltal. Därför är π^2 irrationellt. $\square$

Övningar.

1. Beräkna

a) $\int_{-2}^{4} x\,dx$ b) $\int_0^4 4\,dx$ c) $\int_2^9 dx$ d) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$
e) $\int_2^4 (x-2)^{\frac{3}{2}}\,dx$ f) $\int_0^4 \frac{2}{1+x}\,dx$ g) $\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx$ h) $\int_1^4 \frac{1+x+2x^2+3x^3}{x}\,dx$

2. Beräkna

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin x\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$
e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$ f) $\int_0^{2\pi} 1+\sin x\,dx$ g) $\int_0^1 e^{2x}\,dx$ h) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. Beräkna

a) $\int_{-2}^{4} |x|\,dx$ b) $\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx$ c) $\int_0^{2\pi} \cos x + |\sin x|\,dx$
d) $\int_{-2}^{4} x - |x|\,dx$

4. Beräkna

a) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ b) $\int \sin 5x + 5\cos 2x\,dx$ c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ d) $\int |x|\,dx$

5. Bestäm $F'(x)$ genom att först beräkna integralen, där
a) $F(x) = \int_0^x t^4\,dt$ b) $F(x) = \int_x^0 t^4\,dt$ c) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t\,dt$

6. Vad är fel med beräkningen $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\,\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2$? Varför är -2 ett orimligt värde för integralen?

7. Beräkna (ledning: använd halva vinkeln):

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin x}\,dx$

8. a) Beräkna att $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \frac{22}{7} - \pi$.
b) Låt $I = \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$. Visa att $\frac{22}{7} - I \leq \pi \leq \frac{22}{7} - I/2$.
c) Beräkna I.

9. Visa att $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$ för alla $-1 < x \leq 1$.

10. Beräkna

a) $\int xe^{2x}\,dx$ b) $\int x^2 \ln x\,dx$ c) $\int x^2 \sin x\,dx$ d) $\int \arctan x\,dx$
e) $\int \arcsin x\,dx$ f) $\int \frac{dx}{\tan x}$ g) $\int \ln(1+x)\,dx$ h) $\int x(x+1)^m\,dx$

11. Beräkna

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$ c) $\int_{-2}^{-1} \ln(-x) \, dx$ d) $\int_{-1}^{1} x^2 \ln|x| \, dx$

12. Beräkna

a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ b) $\int \frac{x^2}{(x^3+2)^2} \, dx$ c) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$ d) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ g) $\int 6\frac{x^2+x^5}{1+x^6} dx$ h) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

13. Beräkna

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$ b) $\int_0^1 \sqrt{x^2+x^4} \, dx$ c) $\int_1^4 \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}} \, dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} \, dx$

14. Beräkna

a) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$ b) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ (sätt $x = t^6$)

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin x}$ (t ex med substitutionen $x = 2\arctan t$, d v s $t = \tan\frac{x}{2}$ och $\tan x = \tan(2\arctan x) = \frac{2t}{1-t^2}$)

15. Visa t ex med variabelsubstitution att

a) $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$ om f är en udda funktion,

b) $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 2\int_0^a f(x) \, dx$ om f är en jämn funktion.

c) Beräkna $\int_{-10}^{10} e^{\sin^2 x}(1+x^{10}) \sin x^3 \, dx$.

16. Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ med hjälp av substitutionen $\sqrt{x^2+a^2} = x+t$.

17. **Exempel.** $\int \frac{dx}{x^2-1}$. Vi försöker hitta a och b så att $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$. Vi multiplicerar båda sidor med x^2-1 och får ekvationen $1 = a(x+1) + b(x-1) = (a+b)x + (a-b)$. Detta gäller för alla x om och endast om $a+b=0$ och $a-b=1$, d v s $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Så $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + C$.

Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-7x+12}$ c) $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+4x}$

18. Beräkna

a) $\displaystyle\int x\ln(1-x) \, dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}} \, dx$ c) $\displaystyle\int \sin^3 x \, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} \, dx$ e) $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$ f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x^2-1| \, dx$

19. Beräkna

a) $\int \cos^2 x\, dx$ b) $\int \tan^2 x\, dx$ c) $\int \ln|x|\, dx$ d) $\int x^a\, dx$

e) $\int x^a\, da$ f) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ g) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ h) $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$

20. Beräkna $\int e^x \sin 2x\, dx$ och $\int e^x \cos 2x\, dx$ samtidigt med partialintegration.

21. Beräkna $\lim_{t\to\infty} \int_0^t xe^{-x}\, dx$.

22. Låt $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$ for $n = 0, 1, \ldots$ Bestäm en formel som uttrycker I_n i I_{n-1}. Beräkna I_0 och I_1. Ge en allmän formel för I_n.

23. a) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}\, dx$.

b) Visa att $\displaystyle 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1+x^4}\, dx = \pi$.

c) Vi får $\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}x+x^2)(-x^4)^i\, dx$ genom att använda den geometriska serien för $\frac{1}{1+x^4}$. Visa formeln

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i}\left(\frac{2}{4i+1} + \frac{2}{4i+2} + \frac{1}{4i+3}\right).$$