Standardgränsvärden

1) $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty \qquad$ om $\alpha > 0$

2) $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \qquad$ om $a > 1$, $\qquad \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \qquad$ om $0 < a < 1$

3) $\lim_{x\to\infty} {}^a\!\log x = \infty \qquad$ om $a > 1$, $\qquad \lim_{x\to\infty} {}^a\!\log x = -\infty \qquad$ om $0 < a < 1$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty \qquad$ om $a > 1$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{{}^a\!\log x} = \infty \qquad$ om $\alpha > 0$ och $a > 1$

6) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

7) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Övningar till Kap. 3.

1. Beräkna

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} 4-\dfrac{(-1)^n}{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{\pi^n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{(\pi/2)^n}$

2. Beräkna

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-4}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2+x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+7}{8+5x-4x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$

3. Beräkna

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\cdot 2^x+3^x+\ln x}{7\cdot 3^x+x^7\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\cdot 2^x - x^2\cdot 3^x$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+2^x)+\ln(1+x)}{x+\ln x}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})$

4. Bestäm

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+\sqrt{x}}{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-5}{|3x+1|}$

5. Bestäm

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^4+8x^2}-x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+\ln x}-\sqrt{x})$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^3+3x}-\sqrt{x^3+x})$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} (x\sqrt{x^2+1}-x^2+1)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$

6. Beräkna

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[5]{n^5+5n^4}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$

7. Undersök följande talföljder då $n\to\infty$

a) $\dfrac{2^n}{n^n}$ b) $n\cos\dfrac{n\pi}{2}$ c) $\dfrac{(-1)^n n}{e^n}$ d) $\dfrac{\sin n}{n}$ e) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

8. Vilka av följande funktioner har oegentliga gränsvärden då $x \to \infty$?

a) $x(2 + \sin x)$ b) $x^2 \sin^2 x$ c) $x \cos x - x^2$

9. Ge exempel på följder a_n och b_n med $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ och $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ så att

a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 37$ b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

d) följden $a_n b_n$ är begränsad, men saknar gränsvärde.

10. Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1-4x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

11. Bestäm

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(2 - \tfrac{1}{n}\right)^n$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$

12. Bestäm

a) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\cos 2t - \cos t}{t^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x - \sin x}{\ln(1+x)}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x + \cos x - e^{3x}}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(x^2-1)\sin x}{x^3}$ e) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t - \sin 2t}{t}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos 3x}{x}$

13. Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \arcsin x}{\tan x + \arctan x}$

14. Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \arcsin(1/n)$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^{1/n}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

15. Bestäm

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^3-1}$

16. Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} (\sin x)^x$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} x \ln x$

17. Bestäm

a) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{e^{2x}-e^{-2x}}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{\sin(x^2+3x)}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x}$ e) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)}$

18. Beräkna

a) $\lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln x}{\ln \sin x}$ b) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4+3x^2}{x^4-x^3+1}-2\right)$ e) $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{1-\sin\frac{1}{n}}\right)$

f) $\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n}$ g) $\lim_{x\to 0} 2^n \sin\frac{x}{2^n}$

19. Visa att man kan bestämma konstanten a och $f(0)$ så att funktionen f blir kontinuerlig i 0, då $f(x)=\dfrac{3^x-1}{x}$ då $x>0$ och $f(x)=\dfrac{\sin ax}{x}$ då $x<0$.

20. Ange alla punkter $x\in\mathbb{R}$ där funktionen $\frac{x^2-1}{|x^2-1|}$ inte är kontinuerlig.

21. Bestäm höger- och vänstergränsvärdet av funktionen $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+x}{|x|}$ då $x\to 0$.

22. Undersök funktionen $\dfrac{x}{|x+1|-|x-1|}$.

23. Beräkna följande gränsvärden, om de existerar:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-6}$ b) $\lim_{x\to 6}\frac{x-3}{x-6}$ c) $\lim_{x\uparrow 6}\frac{x-3}{x-6}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{|x-2|}$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{|x-2|}$ f) $\lim_{x\downarrow 2}\frac{x^2-4}{|x-2|}$

24. Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

25. Visa att $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots=\dfrac{1}{4}$.

26. Konvergerar eller divergerar följande serier

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+12}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-1}$

27. För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller att $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$?

28. Bestäm

a) $\displaystyle 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

b) $\displaystyle 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{3}{64} + \ldots$

c) $\displaystyle 1 - x^2 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

29. Beräkna $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$, dvs gränsvärdet till följden a_n med $a_0 = 1$ och $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$.

30. Låt a och b vara reella tal. Definiera följden a_n rekursivt genom $a_0 := a$, $a_1 := b$ och $a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ för $n \geq 2$. Visa att följden konvergerar och bestäm gränsvärdet.

31. Bestäm $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{4x+5}$. Hur stort måste x väljas för att $\frac{3x+2}{4x+5}$ inte skall avvika med mer än 10^{-4} från gränsvärdet? Visa att $\frac{3x+2}{4x+5}$ har gränsvärde då $x \to \infty$ med hjälp av gränsvärdesdefinitionen.

32. Bevisa med hjälp av gränsvärdesdefinitionen att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \infty\,.$$

33. Bevisa med hjälp av gränsvärdesdefinitionen att

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\frac{1}{x^3} = 0\,.$$

34. Visa att $f\colon [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{om } x \text{ är rationellt,} \\ 1-x, & \text{om } x \text{ är irrationellt,} \end{cases}$$

är bijektiv, men kontinuerlig bara för $x = 1/2$.

35. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$. Ange ett tal $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(2)| < 10^{-3}$ för alla x med $0 < |x-2| < \delta$. Visa med hjälp av definitionen att $f(x)$ är kontinuerlig för $x = 2$.

36. Antag att följden a_n konvergerar mot $a \in \mathbb{R}$. Visa att följden

$$b_n := \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1}$$

också konvergerar mot a.

37. Har functionen $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, ett maximum? Har den ett minimum?

38. Låt $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig med $f(0) = f(1) = 0$. Visa att det finns ett tal $c \in [0, \frac{1}{2}]$ med $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

39. Betrakta talföljden

$$p_n := \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}\ .$$

Visa att det finns ett tal p med $\sqrt{2} < p < 2$ sådant att $\lim_{n\to\infty} p_n/\sqrt{n} = p$. Ledning: visa att $p_n/\sqrt{n}$ är avtagande, medan $p_n/\sqrt{n+1}$ är växande. Beräkningen av p sker genom Wallis produkt

$$w_n := \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = p_n^2 \cdot \frac{1}{2n+1}\ .$$

Medels integralräkning kommer vi att visa att $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$.

40. Visa att

$$\frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$$

och därmed

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \cos\frac{x}{2^\nu}\ .$$

Sätt $x = \pi/2$ och dra slutsatsen att

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots\ .$$