MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tenta MA 1200 Analys 1, 991217

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

4. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 x}\, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 x}\, dx = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\,\big|_0^{\pi} + \cos x\,\big|_{\pi}^{2\pi} = (1+1)+(1+1) = 4.$

5. a) $\displaystyle\frac{2^{x+1}}{2^x+1} = \frac{2}{1+2^{-x}} \to 2$ då $x\to\infty$.
b) $\displaystyle\frac{\tan 2x + \sin x}{\ln(1+2x)} = \frac{2\frac{\tan 2x}{2x} + \frac{\sin x}{x}}{2\frac{\ln(1+2x)}{2x}} \to \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ då $x\to 0$.

6. Om $x>0$ är $f(x)=x$, som är en kontinuerlig funktion. Om $x<0$ är $f(x)=-x$, som är en kontinuerlig funktion. Vi visar kontinuitet i 0. Vi har $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}(-x) = 0$ och $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}(x) = 0$, så $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

7. $\frac{d}{dx}e^{-x} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-(x+h)}-e^{-x}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{-x}\frac{e^{-h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} -e^{-x}\frac{e^{-h}-1}{-h} = -e^{-x}.$

8. I. Definitionsområdet av funktionen $f(x)=x^3e^{-x}$ är $\mathbb{R}$. Vi beräknar $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Vi har $f(x)=0$ omm $x^3=0$ omm $x=0$. Omm $x>0$ är $f(x)>0$ och $f(x)<0$ omm $x<0$.
II. Vi har $f'(x) = (3x^2-x^3)e^{-x}$ och $f'(x)=0$ om $x=0$ eller $x=3$. Observera att $f(3) = 27e^{-3} \approx 1,4$. Vi får:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 3 & & & x \\ \hline + & 0 & + & 0 & - & & f' \\ \nearrow & \text{terrass} & \nearrow & \text{max} & \searrow & & f \end{array}$$

III. Vi har $f''(x) = (6x-6x^2+x^3)e^{-x}$ och $f''(x)=0$ omm $x=0$ eller $x=3\pm\sqrt{3}$. detta ger tre inflexionspunkter.
Grafen ser ut som