MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tenta MAL 400 Analys, 990102

1. a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x}{3x^4-5x^3-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^3}}{3-\frac{5}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}}=\frac{1}{3}\,,$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-3n+3}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-3n+3}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}}=2\,.\end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-e^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-2\sin^2 x-e^x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-e^x}{x}-2\sin x\frac{\sin x}{x}\right)=-1-0=-1\,.$$

3. Vi har $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ med nämnaren alltid positiv. Så $f'(x)=1\Leftrightarrow|2x|=x^2+1$ eller $x^2\pm2x+1=0$. Vi hittar lösningar $x=1$ och $x=-1$.

4.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{h}=0.$$

5. I. Definitionsområdet av funktionen $f(x)=x^{-2}-(x-1)^{-2}$ är $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Vi beräknar $\lim_{x\to0}f(x)=\infty$ och $\lim_{x\to1}f(x)=-\infty$. Vidare är $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Vi har $f(x)=0$ omm $x^2=(x-1)^2$ omm $x=1/2$. Detta ger

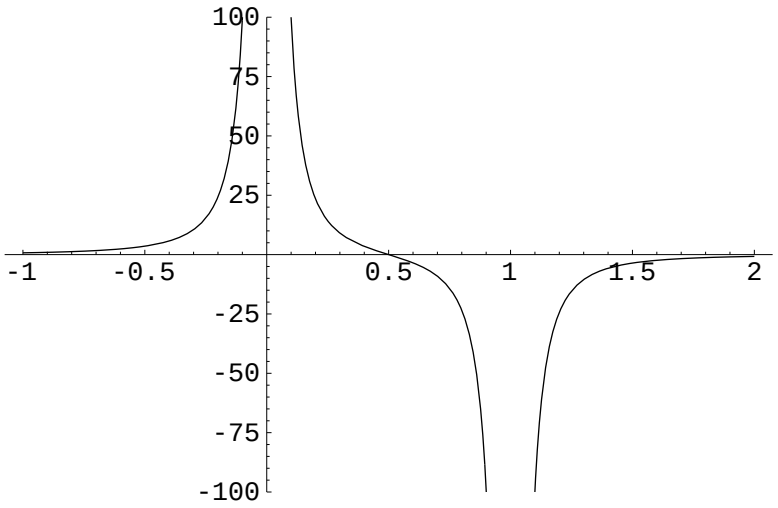
	0		$\frac{1}{2}$		1		x
	$+$	$*$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	f

II. Vi har $f'(x)=-2x^{-3}+2(x-1)^{-3}$ och $f'(x)=0$ omm $x^3=(x-1)^3$ eller $3x^2-3x+1=0$, vilket är en kvadratisk ekvation som saknar reella lösningar. Observera att $f'(1/2)=-32$. Vi får:

	0		1		x
	$+$	$*$	$-$	$*$	$+$	f'
	$\nearrow$	$*$	$\searrow$	$*$	$\nearrow$	f

III. Vi har $f''(x)=6x^{-4}-6(x-1)^{-4}$ och $f''(x)=0$ omm $0=x^4-(x-1)^4=(x^2+(x-1)^2)(2x-1)$. Den första faktorn saknar reella lösningar, och enda lösningen är $x=1/2$.

Grafen ser ut som



6.

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx$$
$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \, .$$

7.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2} \, dx^2 = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \, .$$

8. Låt $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{x^2}{x^2+1999} - 1 \right| = \left| \frac{-1999}{x^2+1999} \right| \leq \left| \frac{1999}{x^2} \right| \, .$$

Om $x > \sqrt{\frac{1999}{\varepsilon}}$ då är $\left| \frac{x^2}{x^2+1999} - 1 \right| < \varepsilon$, alltså är $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1999} = 1$.