

Tentamen i MAL610, del 1

Var noga med motiveringarna!
Skriv endast en uppgift per blad.
Skriv bara på papperets ena sida.

1. Visa att då $x > -1$ gäller

$$\ln(1+x) \leq x$$

med likhet om och endast om $x = 0$.

2. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \ln(1+x)) \sin x}{x - \arctan x}$$

3. Undersök kurvan

$$y = \frac{x^3 - 7x}{x^2 + 1}$$

med avseende på nollställen, asymptoter, symmetri, växande och konkavitet. Rita kurvan.

4. Bestäm talen a och b så att

$$f(x) = ax + bx^2 - x^3$$

har en lokal extrempunkt i $(3, 27)$. Är det ett maximum eller ett minimum?

5. En burk i form av en rät cirkulär cylinder skall tillverkas av plåt, där topp och botten skall vara dubbelt så tjocka som mantelytan. Vilka proportioner skall burken ha för att bestå av så litet plåt som möjligt vid en given volym?
6. Definiera $\arctan x$ (skrivs i boken $\tan^{-1} x$) och härled dess derivata.
7. (a) Visa att om $f'(x) \geq 0$ för alla x i ett intervall I så är f växande på I .
(b) Visa att om f är växande på ett intervall I och deriverbar i punkten $a \in I$ så är $f'(a) \geq 0$.