

## Tentamen i MAL610, del 1

Skriv namn och personnummer på varje blad.  
Skriv endast en uppgift per blad.  
Skriv bara på papperets ena sida.

Var noga med motiveringarna!

1. Visa att

$$\ln \frac{1+x}{1-x} > 2x$$

om och endast om  $0 < x < 1$ .

2. Undersök kurvan

$$y = \frac{3x^3 + 26x^2 + 20x + 32}{50x}$$

med avseende på nollställena, asymptoter, symmetri, växande och konkavitet. Rita kurvan.

3. Vilken är den största möjliga volymen för en rät cirkulär cylinder som är inskriven i ett klot med radien  $a$ ?

4. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{\sqrt{1+x^2} - 1}.$$

5. Betrakta funktionen  $f(x) = x^2(2 + \sin \frac{1}{x})$ ,  $f(0) = 0$ .

(a) Beräkna dess derivata för  $x \neq 0$ .

(b) Beräkna dess derivata för  $x = 0$ .

(c) Visa att  $f$  har minimum för  $x = 0$  t.ex. genom att visa att  $f(x) \geq x^2$ .

(d) Visa att det finns godtyckligt små positiva  $x$ -värden för vilka  $f'(x) < 0$ ;  $f$  är alltså inte växande omedelbart till höger om sitt minimum, hur underligt det än kan verka.

6. Visa att om funktionerna  $f$  och  $g$  är deriverbara i  $x$  så är deras produkt  $f \cdot g$  deriverbar i  $x$  och  $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .

7. Definiera  $\arcsin x$  (skrivs i boken även  $\sin^{-1} x$ ) och härled dess derivata.