MAL610, del 1. Svar på tentor

26 okt 00

1. Betrakta funktionen $f(x) = x - \ln(1+x)$ och visa att llden har absolut min. $= 0$ för $x = 0$.
2. Maclaurinutveckla; svar 3/2.
3. $y = 0 \iff x = 0, \pm\sqrt{7}$.

   $f(x) = x - \dfrac{8x}{x^2+1}$ så $y = x$ är asymptot.

   $f(-x) = -f(x)$ så f är udda.

   $f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{4\sqrt{2}-5} \approx \pm 0.81$.

   $f''(x) = 0 \iff x = 0, \pm\sqrt{3}$.
4. $f(3) = 27, f'(3) = 0$ ger $a = 9, b = 3$ och ett lokalt max. i $(3, 27)$.
5. Burkens höjd skall vara dubbla diametern.

4 apr 01

1. Studera funktionen $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
2. $y = 0 \iff x = 1, 2$.

   $y = -1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}$; asymptoter $x = 0$ och $y = -1$.

   $f(-x) \neq \pm f(x)$.

   $y' = 0 \iff x = \frac{4}{3}$.

   $y'' = 0 \iff x = 2$.
3. $f'(x) = 0 \iff x = \pm 2$. $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty, f(-2) = 133 > 0, f(2) = -123 < 0$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ så f har exakt ett nollställe i vart och ett av intervallen $]-\infty, -2[,\ ]-2, 2[,\ ]2, \infty[$.
4. Maclaurinutveckla; svar 10.
5. $\frac{3}{2}$ m/s (nedåt, förstås!).

14 feb 02

1. Studera funktionen $\arctan x - x + \frac{x^3}{3}$.
2. $y = 0 \iff x = 0$.

   $y = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$; asymptoter $x = 1$ och $y = x + 2$.

   Ingen symmetri.

   $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.

   $f''(x) = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$.
3. Ansätt $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Deriverbarhet i 0 och 1 ger $p(0) = 1, p(1) = 0$, $p'(0) = p'(1) = 0$ vilket ger a, b, c, d; $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ $[= (x-1)^2(2x+1)]$.
4. Maclaurinutveckla; svar $-\frac{3}{2}$.
5. Att gå utanför åkern går på exakt 4.5 min. Snabbaste sättet att snedda genom åkern är att gå rakt mot en punkt på åkerns södra kant $\frac{1050}{\sqrt{51}} \approx 147$ m från den östra kanten och sedan följa den södra kanten hem. Det tar $3 + \frac{3\sqrt{51}}{14} \approx 4.53$ min. och är alltså både långsammare och jobbigare.

31 okt 02

1. Studera funktionen $\ln \dfrac{1+x}{1-x} - 2x = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x.$

2. $y = \dfrac{3x^3 + 26x^2 + 20x + 32}{50x} = \dfrac{1}{50}(3x^2 + 26x + 20 + \dfrac{32}{x}).$

   $y = 0 \iff x = -8.$

   Asymptot $x = 0$. Dessutom närmar sig kurvan asymptotiskt parabeln $y = \frac{1}{50}(3x^2 + 26x + 20)$ i $\pm\infty$.

   $y' = \frac{3x^3+13x^2-16}{25x^2}$ $\quad y' = 0 \iff x = -4, -\frac{4}{3}, 1.$

   $y'' = \frac{3x^3+32}{25x^3}$ $\quad y'' = 0 \iff x = -(\frac{32}{3})^{\frac{1}{3}} \approx -0.74.$

3. $V_{\max} = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot$ klotvolymen. Då är cylinderns radie $a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ och höjd $a \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. Maclaurinutveckla; svar 2.

5. a) $2x(2 + \sin\frac{1}{x}) - \cos\frac{1}{x}$.

   b) 0. Använd derivatans definition.

   c) $1 \leq 2 + \sin\frac{1}{x} \leq 3$ så $x^2 \leq f(x) \leq 3x^2$.

   d) $f'(\frac{1}{n \cdot 2\pi}) < 0, n \geq 1.$