MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MAM100), Matematisk baskurs.
Datum: 2005-01-05.

1. (a) Se sidorna 111-112 i boken.
   (b) Se sidan 114 i boken.
2. (a) Se sidan 89 i boken.
   (b) Se sidan 88 i boken.
3. (a) Se idé i boken sidan 53.
   (b) Välj $x = 1$ och $y = 0$ och vice versa.
4. (a) Primtalsfaktoriseringen ges av $450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Alla positiva delare ges av alla möjliga produkter av dessa faktorer och om man successivt tar de som innehåller $0, 1, 2, 3, 4$ respektive 5 faktorer så får man:

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 25, 18, 30, 45, 50, 75, 90, 150, 225, 450\}.$$

   (b) Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 301 &= 3 \cdot 84 + 49 \\ 84 &= 1 \cdot 49 + 35 \\ 49 &= 1 \cdot 35 + 14 \\ 35 &= 2 \cdot 14 + 7 \\ 14 &= 2 \cdot 7. \end{aligned}$$

   Alltså är $\mathrm{SGD}(301, 84) = 7$. Vi ersätter successivt de erhållna resterna och får:

$$\begin{aligned} 7 &= 35 - 2 \cdot 14 = 35 - 2 \cdot (49 - 1 \cdot 35) = 3 \cdot 35 - 2 \cdot 49 \\ &= 3 \cdot (84 - 1 \cdot 49) - 2 \cdot 49 = 3 \cdot 84 - 5 \cdot 49 \\ &= 3 \cdot 84 - 5 \cdot (301 - 3 \cdot 84) = 18 \cdot 84 - 5 \cdot 301. \end{aligned}$$

5. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 1$

   Då gäller att

$$VL = \sum_{k=1}^{1} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 = 1 \text{ och } HL = (1-1) \cdot 2^1 + 1 = 1,$$

   och alltså gäller likheten för $n = 1$.

Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt positivt heltal n. Visa att då gäller det också för $n+1$. Vi får

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} + (n+1)\cdot 2^n = \\ &= (n-1)\cdot 2^n + 1 + (n+1)\cdot 2^n = 2n \cdot 2^n + 1 = \\ &= ((n+1)-1)\cdot 2^{n+1} + 1,\end{aligned}$$

och alltså gäller likheten också för $n+1$.

Enligt induktionsaxiomet gäller därmed likheten för alla positiva heltal.

6. Låt t ex $P(x,y)$ vara öppna utsagan $x > y$ och sätt universum till $\mathbb{R}$ för både x och y. Då gäller för alla x att det finns y sådant att $x > y$, vi kan t ex ta $y = x - 1$. Alltså är

$$\forall x \exists y P(x,y)$$

en sann utsaga. Däremot finns det inget y sådant att $x > y$ för alla x. Ett sådant y skulle vara ett minsta reellt tal vilket ju inte existerar, t ex är $y - 1 \not> y$. Alltså är

$$\exists y \forall x P(x,y)$$

en falsk utsaga

7. Det finns 1 rad med 13 rätt. För 12 rätt finns det $\binom{13}{1} = 13$ olika matcher som kan missas och för var och en av dessa finns det 2 möjligheter. Det blir totalt $13 \cdot 2 = 26$ rader med 12 rätt. För 11 rätt finns det $\binom{13}{2} = 78$ olika par av matcher som kan missas och för var och en av dessa par finns det 4 möjligheter. Det blir totalt $78 \cdot 4 = 312$ rader med 11 rätt. För 10 rätt finns det $\binom{13}{3} = 286$ olika tripplar av matcher som kan missas och för var och en av dessa tripplar finns det 8 möjligheter. Det blir totalt $286 \cdot 8 = 2288$ rader med 10 rätt. Sammantaget får vi följande svar:

$$1 + 26 + 312 + 2288 = 2627.$$

(Chansen att få 9 rätt är alltså mer än 4 gånger så stor som att få in en vinst. Något man bör ha i åtanke när man förbannar sin otur efter ännu en vecka med retfulla 9 rätt.)

8. (a) Reflexiv: Tag $a \in G$. Då har vi att $a \star a^{-1} = e \in H$ så $a\mathcal{R}a$.
Symmetrisk: Antag att $a\mathcal{R}b$, d v s $a \star b^{-1} \in H$. Eftersom H är en grupp så gäller att $(a \star b^{-1})^{-1} \in H$. Men $(a \star b^{-1})^{-1} = b \star a^{-1}$ så alltså har vi att $b\mathcal{R}a$.
Transitiv: Antag att $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$, d v s $a \star b^{-1} \in H$ och $b \star c^{-1} \in H$. Men $\star$ är en operation på H så $(a \star b^{-1}) \star (b \star c^{-1}) \in H$. Men från associativiteten hos $\star$ får vi nu att

$$(a \star b^{-1}) \star (b \star c^{-1}) = a \star (b^{-1} \star b) \star c^{-1} = a \star e \star c^{-1} = a \star c^{-1}.$$

Alltså får vi att $a\mathcal{R}c$.

(b) Addition är en operation på H_N, ty $N \mid m$ och $N \mid n$ ger $N \mid (m+n)$. Vidare gäller att H_N har ett neutralt element eftersom $0 \in H_N$. Till slut är inversen av ett element i H_N också i H_N, ty $N \mid n$ implicerar att $N \mid -n$. (Addition är givetvist automatiskt kommutativ och associativ på H_N efterson $H_N \subseteq \mathbb{Z}$.)

(c) Definitionen av $\mathcal{R}$ ger i specialfallet $G = \mathbb{Z}$ och $H = H_N$ att $m\mathcal{R}n$ om och endast om $m - n \in H_N$. Men $m - n \in H_N$ om och endast om $N \mid m-n$, d v s om och endast om $m \equiv n \pmod{N}$. I detta specialfall är alltså $\mathcal{R}$ ingenting annat än kongruens modulo N.