MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MAM100), Matematisk baskurs.
Datum: 2004-11-01.

1. (a) Se Övningshäfte 6.

   (b) Operationen är automatiskt kommutativ och associativ.

2. (a) Se boken sidan 86.

   (b) Man kan t ex ta relationen '$\neq$'. Denna är uppenbarligen inte reflexiv men symmetrisk. Dessutom är den inte transitiv, ty $1 \neq 2$ och $2 \neq 1$ men $1 = 1$. Man kan också tänka sig ett litet trivialt exempel som $R = \{(1,2),(2,1)\}$.

3. (a) Se boken sidan 62.

   (b) Se boken sidan 62.

4. (a) Om vi bortser från villkoret så finns det $\binom{14}{5}$ olika arbetsgrupper. Ifrån detta tal får vi sedan subtrahera det antal grupper som innehåller både Herr V och Fru M. En sådan grupp väljs ut genom att de övriga 3 medlemmarna väljs bland de återstående 12. Det finns alltså $\binom{12}{3}$ sådana grupper. Svaret är alltså

$$\binom{14}{5} - \binom{12}{3} = 1782.$$

   (b) Samma resonemang som ovan ger

$$\binom{n}{k} - \binom{n-2}{k-2}.$$

5. (a) Vi gör ett induktionsbevis.
   Basfall: $n = 0$
   Då gäller att

$$\sum_{i=1}^{0} F(2i-1) = 0 = F(2 \cdot 0),$$

   och alltså gäller likheten för $n = 0$.
   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt naturligt tal n. Visa att då gäller det också för $n+1$. Vi får

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n} F(2i-1) + F(2(n+1)-1) \\ &= F(2n) + F(2n+1) = F(2n+2) = F(2(n+1))\end{aligned}$$

   och alltså gäller likheten också för $n+1$.
   Enligt induktionsaxiomet gäller därmed likheten för alla naturliga tal.

(b) Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: $n = 0$

Vi har att $F(0) = 0$ och $F(1) = 1$ och eftersom $\mathrm{SGD}(0, 1) = 1$ så gäller påståendet för $n = 0$.

Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt naturligt tal n, dvs. $\mathrm{SGD}(F(n), F(n+1)) = 1$. Vi ska visa att då gäller det också att $\mathrm{SGD}(F(n+1), F(n+2)) = 1$.

Ett positivt heltal k som delar både $F(n+1)$ och $F(n+2)$ delar också $F(n) = F(n+2) - F(n+1)$. Eftersom $\mathrm{SGD}(F(n), F(n+1)) = 1$ så följer det att $k = 1$ och därmed att $\mathrm{SGD}(F(n+1), F(n+2)) = 1$.

Enligt induktionsaxiomet gäller därmed påståendet för alla naturliga tal.

6. (a) Tag t.ex. $A = C = \{0\}$ och $B = \{0, 1\}$ och $f(x) = g(x) = 0$ för alla x i respektive definitionsmängd.

(b) Antag att $g \circ f$ är bijektiv. Tag $x, y \in A$ med $f(x) = f(y)$. För att visa att f är injektiv så ska vi visa att i så fall är $x = y$. Men $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ och eftersom $g \circ f$ är bijektiv och speciellt injektiv så följer det att $x = y$ och alltså är f injektiv.

Antag återigen att $g \circ f$ är bijektiv. För att visa att g är surjektiv så ska vi visa att $g(B) = C$. Men $g \circ f$ är bijektiv och speciellt surjektiv så $g \circ f(A) = C$. Men $f(A) \subseteq B$ så vi får $C = g(f(A)) \subseteq g(B)$ och alltså är $g(B) = C$ och därmed är g surjektiv.

7. (a) Vi har att $2004 = 182 \cdot 11 + 2$ så

$$2004^{2004} \equiv 2^{2004} \pmod{11}.$$

Successiva potenser av 2 modulo 11 ger $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 \equiv 5$, $2^5 \equiv -1$ och $2^{10} \equiv 1$. Det ger

$$2^{2004} = (2^{10})^{200} \cdot 2^4 \equiv 1^{200} \cdot 5 \equiv 5 \pmod{11}.$$

Svaret är alltså $a = 5$.

(b) Vi får följande rester modulo 17 för 3^x:

$$\begin{aligned}
3^0 &\equiv 1,\ 3^1 \equiv 3,\ 3^2 \equiv 9,\ 3^3 \equiv 10,\ 3^4 \equiv 13,\ 3^5 \equiv 5,\ 3^6 \equiv 15,\\
3^7 &\equiv 11,\ 3^8 \equiv 16,\ 3^9 \equiv 14,\ 3^{10} \equiv 8,\ 3^{11} \equiv 7,\ 3^{12} \equiv 4,\ 3^{13} \equiv 12,\\
3^{14} &\equiv 2,\ 3^{15} \equiv 6,\ 3^{16} \equiv 1.
\end{aligned}$$

Så första gången vi får resten 1 igen är då $x = 16$. Denna följd av 16 olika rester kommer nu att återupprepas gång efter gång eftersom

$$3^{x+16} \equiv 3^x \cdot 3^{16} \equiv 3^x \cdot 1 \equiv 3^x \pmod{17}.$$

Från detta ser vi att $3^x \equiv 10$ är sant om och endast om $x = 3 + 16n$ där n är ett godtyckligt naturligt tal.

8. (a) I $\mathbb{Z}_6$ gäller att $[2] \odot [3] = [6] = [0]$ så att både $[2]$ och $[3]$ (liksom $[4]$) är nolldelare i $\mathbb{Z}_6$.

(b) Att $[a] \odot [b] = [ab] = [0]$ är ekvivalent med att $n \mid ab$ Antag först att n inte är ett primtal. Då gäller att $n = kl$ där $1 < k, l < n$. Vi ser därmed att $[k]$ och $[l]$ är nolldelare, eftersom $[k] \neq [0]$, $[l] \neq [0]$ men $[k] \odot [l] = [kl] = [n] = [0]$. Om däremot n är ett primtal så har vi att $n \mid ab$ medför att antingen $n \mid a$ eller $n \mid b$. Detta betyder att $[ab] = [0]$ medför $[a] = 0$ eller $[b] = [0]$ vilket betyder att $\mathbb{Z}_n$ saknar nolldelare. Svaret är alltså alla som inte är primtal.

(c) Antag att $ab = 0$ i en kropp. Om $b \neq 0$ så finns det b^{-1} sådant att $bb^{-1} = 1$. Multiplicera likheten $ab = 0$ med b^{-1} i båda leden vilket ger

$$0 = 0 \cdot b^{-1} = (ab)b^{-1} = a(bb^{-1}) = a \cdot 1 = a.$$

Detta betyder att $ab = 0$ implicerar $b = 0$ eller $a = 0$, d v s att kroppen saknar nolldelare.