MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MAM100), Matematisk baskurs.
Datum: 2005-01-05.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakter: Yosief Wondmagegne, 0762-186654.

OBS: Ange personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. (a) Låt $P(m,n)$ vara antalet permutationer av n element bland m. Ge ett argument för formeln

$$P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

   (b) Låt $\binom{m}{n}$ vara antalet delmängder med n element till en mängd med m element. Ge ett argument för formeln

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

(3p)

2. (a) Definiera begreppet *partition* av en mängd.
   (b) Låt R vara en ekvivalensrelation på en mängd M. Visa att ekvivalensklasserna till R utgör en partition av M. (4p)

3. (a) Antag att $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Visa att om $a \mid b$ och $a \mid c$ så gäller att $a \mid xb + yc$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$.
   (b) Visa omvändningen, d v s att om $a \mid xb + yc$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$ så gäller att $a \mid b$ och $a \mid c$. (3p)

4. (a) Bestäm alla positiva delare till 450.
   (b) Beräkna $\mathrm{SGD}(301, 84)$ och bestäm $x, y \in \mathbb{Z}$ sådana att

$$301x + 84y = \mathrm{SGD}(301, 84).$$

(3p)

5. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$$

för alla positiva heltal n. (3p)

6. Ge exempel på öppen utsaga $P(x,y)$ sådan att

$$\forall x \exists y P(x,y)$$

är en sann utsaga, men

$$\exists y \forall x P(x,y)$$

är en falsk utsaga. Glöm inte att ange universum för x respektive y. Motivera kort ditt svar. (2p)

7. På stryktipset gäller det att tippa utgången i 13 fotbollsmatcher. I varje match finns det 3 möjliga utfall ('1', 'X' eller '2'). Chans att vinna har man om man får minst 10 rätt. Givet ett utfall i de 13 matcherna så finns det 11440 rader som har 9 rätt. Hur många rader finns det som ger chans till vinst, d v s som har minst 10 rätt? (3p)

8. Låt G med operationen $\star$ vara en *grupp*. Man säger att en delmängd H till G är en *delgrupp* till G om H också är en grupp med operationen $\star$. Speciellt måste då det neutrala elementet ligga i H.

   Låt H vara en delgrupp i en grupp G med en operation $\star$. Det neutrala elementet betecknas med e och inversen av a skrivs a^{-1}. Vi definierar nu en relation $\mathcal{R}$ på G genom att säga att $a\mathcal{R}b$ om och endast om $a \star b^{-1} \in H$.

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

   (b) Motivera att $H_N = \{k \in \mathbb{Z} : N \mid k\}$ är en delgrupp till $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ om N är ett positivt heltal.

   (c) Vad är relationen $\mathcal{R}$ ovan i specialfallet $\langle G, \star \rangle = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ och $H = H_N$? (4p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 12 januari. Resultaten anslås i källaren på Matematiskt Centrum och tentorna kan avhämtas i mottagningsrummet på Matematiskt Centrum mellan 12:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.