MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MAM100), Matematisk baskurs.
Datum: 2004-11-01.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Håkan Samuelsson, 0762-186654.

OBS: Ange personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. (a) Ge definitionen av att en mängd G med operationen $\star$ är en grupp.

   (b) Antag att $\langle G, \star \rangle$ är en grupp och att $H \subseteq G$. Man säger att $\langle H, \star \rangle$ är en delgrupp till $\langle G, \star \rangle$ om $\langle H, \star \rangle$ är en grupp. Två av villkoren (axiomen) i definitionen av en grupp är automatiskt uppfyllda för $\langle H, \star \rangle$ eftersom $H \subseteq G$. Vilka? (3p)

2. (a) Definiera begreppen *reflexiv*, *symmetrisk* och *transitiv* relation.

   (b) Ge exempel på en relation på $\mathbb{Z}$ som är symmetrisk, men varken reflexiv eller transitiv. (3p)

3. (a) Formulera Aritmetikens fundamentalsats.

   (b) Antag att p är ett primtal. Visa att om $p \mid ab$, så medför det att $p \mid a$ eller $p \mid b$. (3p)

4. (a) De 14 personerna i inrikesutskottet ska välja en intern arbetsgrupp som ska bestå av 5 personer. Herr V och Fru M kommer inte alls överens så dessa kan inte båda vara med i gruppen. I övrigt kan gruppen sättas ihop hur som helst. Hur många möjliga grupper finns det?

   (b) Generalisera föregående uppgift till fallet med n personer i utskottet och k personer i arbetsgruppen där n och k är godtyckliga heltal med $1 < k < n$. (3p)

Var god vänd!

5. Vi definierar (som vanligt) Fibonacci-talen enligt följande:

$$\begin{cases} F(0) = 0, \\ F(1) = 1, \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ om } n \geq 2. \end{cases}$$

   (a) Visa att dessa satisfierar likheten

   $$\sum_{i=1}^{n} F(2i-1) = F(2n),$$

   för alla naturliga tal n.

   (b) Visa att två på varandra följande Fibonacci-tal är relativt prima, d v s att största gemensamma delaren av $F(n)$ och $F(n+1)$ är 1 för alla naturliga tal n.

(4p)

6. (a) Ge exempel på funktioner f, g och mängder A, B, C med $f : A \longrightarrow B$ och $g : B \longrightarrow C$ sådana att $g \circ f$ är bijektiv men varken f eller g är bijektiv, d v s visa att ingen av implikationerna

   $$g \circ f \text{ bijektiv } \Longrightarrow f \text{ bijektiv}$$

   eller

   $$g \circ f \text{ bijektiv } \Longrightarrow g \text{ bijektiv}$$

   gäller helt allmänt.

   (b) Visa att

   $$g \circ f \text{ bijektiv } \Longrightarrow f \text{ injektiv}$$

   och

   $$g \circ f \text{ bijektiv } \Longrightarrow g \text{ surjektiv}.$$

(3p)

7. (a) Bestäm ett tal a sådant att $0 \leq a < 11$ och $a \equiv 2004^{2004} \pmod{11}$.

   (b) Bestäm **alla** naturliga tal x sådana att $3^x \equiv 10 \pmod{17}$. (3p)

8. Antag att vi har en ring R. Ett element $a \in R \setminus \{0\}$ kallas för en *nolldelare* om det finns $b \neq 0$ sådant att $ab = 0$.

   (a) Visa att $\langle \mathbb{Z}_6, \oplus, \odot \rangle$ har nolldelare.

   (b) För vilka heltal $n \geq 2$ gäller det att $\langle \mathbb{Z}_n, \oplus, \odot \rangle$ har nolldelare? Motivera ditt svar.

   (c) Visa att det inte finns några nolldelare i en kropp.

(3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 3 november. Resultaten anslås i källaren på Matematiskt Centrum och tentorna kan avhämtas i mottagningsrummet på Matematiskt Centrum mellan 12:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.