

Fingerade tentor

Fingerade tenta nr 1

Teoriuppgifter

1. Låt L vara en linjär operator på ett vektorrum V . Vad menas med kärnan av L ? Visa att kärnan och värdemängden till L är underrum i V . Visa också att L är injektiv om och endast om kärnan för L bara består av nollvektorn! (4p)
2. (a) Vad menas med en symmetrisk matris?
 (b) Skriv upp alla symmetriska 2×2 -matriser!
 (c) Vad menas med en Hermitesk matris?
 (d) Skriv upp en Hermitesk 2×2 -matris som **inte** är symmetrisk!
 (e) Vad menas med en unitär matris?
 (f) Skriv upp en unitär 2×2 -matris som **också** är Hermitesk!

(3p)

Problemuppgifter

3. Motivera varför vektorerna

$$(1, 1, 1, 0)^T, (1, 2, 0, 1)^T, (0, 1, 1, 0)^T, (0, 1, 0, 1)^T$$

är en bas i $\mathbb{R}^4$. Bestäm sedan koordinaterna för $(1, 0, 0, 1)^T$ i denna bas.

(3p)

4. Låt V vara det linjära rummet av alla följder $\mathbf{x} = (x_n)_0^\infty$ och låt H vara underrummet av alla lösningar till differensekvationen

$$x_{n+2} - 4x_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Bestäm en bas i H , Bestäm också matrisen i denna bas för avbildningen $L : H \rightarrow H$, som avbildar följden (x_n) på följden (x_{n+2}) .

(3p)

5. Betrakta följande tidskontinuerliga dynamiska system där a och b är reella parametrar:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + ay(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = ax(t) - 4y(t), & y(0) = b, \end{cases}$$

Man vet att $x(t) \rightarrow -2$, $y(t) \rightarrow 1$ då $t \rightarrow \infty$. Vilka värden måste a och b ha? Bestäm lösningen för dessa parametervärden! (3p)

6. På rummet $\mathbb{R}^4$ (med standardskalärprodukten) definieras den linjära avbildningen

$$L(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3 - x_4)^T$$

Låt P vara den ortogonala projektionen av $\mathbb{R}^4$ på kärnan (nollrummet) till L . Finn en ortogonal diagonalisering av P . (3p)

7. Betrakta rummet $\mathbb{R}_3[t]$ av alla reella tredjegradspolynom i t . Definiera operatorn $L : \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$ genom att sätta $L(p) = q$ där

$$q(t) = t^2 p''(t) + p'(t).$$

Bestäm egenvärdena och motsvarande egenrum till L (3p)

8. Låt A och M vara reella och symmetriska $n \times n$ -matriser och antag att alla egenvärdena till A är icke-negativa. Visa att om μ är det största egenvärdet till M och σ är det största egenvärdet till $M + A$, så är $\sigma \geq \mu$. (3p)

Svar

3. $(2, -1, -2, 2)^T$
4. Bas: $(2^n), (-2)^n$. Matris: $4I$
5. $a = -2, b = 7, \mathbf{x}(t) = (-2, 1)^T + 3e^{-5t}(1, 2)^T$
6. Ortogonal bas av egenvektorer till P : $(0, 1, 1, 1)^T, (1, -1, 0, 1)^T, (1, 1, -1, 0)^T, (1, 0, 1, -1)^T$.
7. Egenvärden: $0, 2, 6$. Egenrum: $\text{Span}\{1\}, \text{Span}\{1+2t+2t^2\}, \text{Span}\{1+6t+18t^2+24t^3\}$
8. Det största egenvärdet till en reell symmetrisk matris S är samtidigt maximum på sfären $|x| = 1$ av den kvadratiske form som definieras av S .

Fingerade tenta nr 2

Teoriuppgifter

1. Visa att en kvadratisk matris A är diagonaliserbar om och endast om A är konjugerad till en diagonalmatris D ! Beskriv också hur man skall finna P så att $A = PDP^{-1}$! (3p)
2. Låt L vara en linjär operator på ett reellt vektorrum med skalärprodukt och med den ortonormala basen $\mathcal{B}$. Antag att matrisen för L i denna bas är symmetrisk! Antag också att $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är egenvektorer till L och att motsvarande egenvärden är olika. Visa att $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är ortogonala! (3p)

Problemuppgifter

3. Låt H vara underrummet i $\mathbb{R}^4$ som består av alla lösningar till systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Vilken punkt i H ligger närmast punkten $(1, 1, 1, 1)^T$?
(Standardskalärprodukten i $\mathbb{R}^4$.)

(3p)

4. Bestäm det reella talet p så att matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & p \end{pmatrix}$$

har egenvektorn $(1, -i)^T$. Finn därefter en ortonormal diagonalisering av matrisen!

(3p)

5. Betrakta den kvadratiske formen

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Visa att det största värde som f antar på enhetssfären $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ är lika med 3 och att det minsta värdet på enhetssfären är -3 . I vilka punkter antas dessa värden?

(3p)

6. På det linjära rummet $\mathbb{R}_2[t]$ av alla reella andragradspolynom p betraktar man skalärprodukten

$$\langle p|q \rangle = 3p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

Låt J vara underrummet av alla jämna andragradspolynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = t$ på J !

(3p)

7. Låt p vara en reell parameter och sätt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & -p \\ p & 0.5 & 0.5 \\ -p & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Studera det dynamiska systemet $\mathbf{x}(n) = A\mathbf{x}(n-1)$. För vilka p existerar gränsvärdet av $\mathbf{x}(n)$ då $n \rightarrow \infty$ för varje startvektor $\mathbf{x}(0)$? Bestäm för alla sådana p -värden gränsvärdet ifall $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 2)^T$. (4p)

8. Låt A vara en komplex $m \times a$ -matris och B en komplex $m \times b$ -matris med samma kolonnrum som A . Visa att $A^\dagger B$ och B har samma nollrum. (Här betecknar $A^\dagger$ transponat-konjugatet av A .) (3p)

Svar

3. $\frac{5}{27}(-6, 4, 1, 1)^T$

4. Matrisen är lika med $PDP^\dagger$ om

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Största värdet antas i $\pm(1/3)(-2, 2, 1)^T$. Minsta värdet antas i $\pm(1/3)(2, 1, 2)^T$.

6. Projektionen är $0.5t^2 + 0.1$

7. $-1 < p\sqrt{2} < 1$, $\mathbf{x}(n) \rightarrow 1.5(0, 1, 1)^T$

8. Visa att varje vektor i kolonnrummet för A är ortogonal mot $B\mathbf{x}$ om $\mathbf{x}$ ligger i nollrummet för $A^\dagger B$.

Fingerade tenta nr 3

Teoriuppgifter

1. Definiera först vad som menas med en Hermitesk matris! Visa sedan att en godtycklig Hermitesk matris har reella egenvärden och är diagonaliserbar! (4p)
2. Antag att A och B är två kvadratiska matriser som kommuterar. Visa att B avbildar varje egenrum till A in i sig självt. (OBS: Det är inte sagt att A eller B är diagonaliserbara!) (3p)

Problemuppgifter

3. Betrakta Markovkedjan $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots$, där $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$ och

$$A = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 14 & 2 & 2 \\ 6 & 18 & 6 \\ 10 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Finn jämviktsfördelningen! (3p)

4. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenvärdet -2 . Bestäm en ortogonal bas av egenvektorer. (3p)

5. Lös det kontinuerliga dynamiska systemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t), \\ x_2'(t) = -4x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

Vad blir lösningen om $\mathbf{x}(0) = (1, 2)^T$ och vad händer när $t \rightarrow \infty$. Vad blir lösningen om i stället $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$. I vilken riktning i planet rör sig lösningen $\mathbf{x}(t)$ asymptotiskt då $t \rightarrow \infty$. (3p)

6. Sätt $\mathbf{u}_1 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^T$ och $\mathbf{u}_2 = (0.5, -0.5, 0.5, -0.5)^T$. Observera att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ är en ortonormal mängd i $\mathbb{R}^4$ med standardskalärprodukten. Finn en ortonormal bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ i $\mathbb{R}^4$, sådan att $\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_1$ och $\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_2$. Beskriv därefter sambandet mellan koordinaterna i basen $\mathcal{B}$ och koordinaterna i standardbasen för en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^4$. (3p)

7. Avbildningen $L : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (med standardskalärprodukten) ges av sambandet

$$L(\mathbf{x}) = (x_1 + bx_2, cx_1 + 4x_2)$$

Man vet att L är Hermitesk och har egenvärdet 0. Finn en ortonormal bas i $\mathbb{C}^2$ i vilken matrisen för L är en diagonalmatris. (3p)

8. Låt $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vara en kolonnvektor i $\mathbb{R}^n$. Visa att det finns ett tal c så att

$$U = I - c\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

är standardmatrisen för en spegling i ett underrum i $\mathbb{R}^n$. Beskriv detta underrum!
(3p)

Svar

1. Jämviktsfördelning $\mathbf{v} = (1/18)(2, 6, 10)^T$
2. Ortogonal bas av egenvektorer : $(1, -1, 0)^T$, $(1, 1, 4)^T$, $(2, 2, -1)^T$, (exempelvis)
3. Om $\mathbf{x}(0) = (1, 2)^T$ så går $\mathbf{x}(t)$ mot $\mathbf{0}$, då $t \rightarrow \infty$.
Om $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$ så kommer $\mathbf{x}(t) - e^{3t}\mathbf{v}$ att gå mot $\mathbf{0}$. Här är $\mathbf{v} = (-0.5, -1)^T$.
4. Exempelvis $\mathbf{u}_3 = (1/\sqrt{2})(-1, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{u}_4 = (1/\sqrt{2})(0, -1, 0, -1)^T$. Om $\mathbf{x}$ är koordinatvektorn i standardbasen och $\mathbf{y}$ är koordinatvektorn i $\mathcal{B}$ -basen så är $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$.
5. $c = 2e^{i\theta}$, $b = 2e^{-i\theta}$. Bas: $\mathbf{b}_1 = (1/\sqrt{5})(-2e^{i\theta}, 1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (1/\sqrt{5})(e^{i\theta}, 2)^T$
6. $c = 2/|\mathbf{a}|^2$. Avbildningen $\mathbf{x} \mapsto U\mathbf{x}$ är spegling i det ortogonala komplementet till $\text{Span}\{\mathbf{a}\}$