

Tentamensskrivning i Linjär Algebra II (MAM220)

Teoriuppgifter

1. Låt H vara en Hermitesk operator på ett ändligtdimensionellt skalärproduktrum! Visa att egenvärdena till H är reella och att egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala!

(3p)

2. (a) Vad menas med en sannolikhetsmatris?
(b) Varför måste en kvadratisk sannolikhetsmatris ha egenvärdet 1 ?
(c) Visa att om A är en kvadratisk sannolikhetsmatris så är A^2 det också!

(3p)

Problemuppgifter

3. Visa att lösningen till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = -0.4x(t) - 0.2y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = -0.2x(t) - 0.1y(t), & y(0) = 1, \end{cases}$$

har ett gränsvärde då $t \rightarrow \infty$ och bestäm detta gränsvärde!

(3p)

4. Betrakta den linjära operator L på $\mathbb{R}^3$, som definieras av sambandet

$$L(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3)^T$$

Bestäm matrisen för L i basen

$$(-1, 1, 0)^T, (1, 0, -1)^T, (0, 1, 1)^T$$

(3p)

5. Låt z vara ett komplext tal, vilket som helst. Diagonalisera matrisen

$$\begin{pmatrix} 1+i & z \\ -z & 1+i \end{pmatrix}$$

(3p)

6. Bestäm matrisen för den ortogonala projektionen av $\mathbb{R}^4$ (med standardskalärprodukten) på underrummet som spänns upp av vektorerna

$$(1, 2, 0, 3)^T, (2, -1, 1, 0)^T, (5, 0, 2, 3)^T$$

(3p)

VÄND!

7. På det linjära rummet $\mathbb{R}_2[t]$ av alla reella andragradspolynom inför man skalärprodukten

$$\langle p|q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 2p(1)q(1)$$

Den linjära operatoren L på $\mathbb{R}_2[t]$ avbildar polynomet $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ på det konstanta polynomet $q(t) = a_0$. Visa att den adjungerade operatoren $L^\dagger$ ges av

$$(L^\dagger q)(t) = (q(-1) + q(0) + 2q(1))(1 - t^2)$$

Skriv sedan polynomet $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ som en summa av ett polynom i kärnan (nollrummet) till L och ett polynom som är ortogonalt mot kärnan!

(4p)

8. Låt A vara en reell, symmetrisk $n \times n$ -matris med positiva egenvärden. Låt vidare M vara det största värdet av $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ på mängden

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 1\}$$

Finn ett uttryck för det största värdet M med hjälp av egenvärdena till A . Beskriv också hur man kan finna en punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ där det största värdet antas!

(3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad fredagen den 2 november.

Resultaten anslås då i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC).

Du kan också få veta resultatet genom att ringa nummer 772 35 93.

Din rättade skrivning kan hämtas efter angivet datum i mottagningsrummet (MC rum 1202D) , måndag - fredag kl. 12.30 - 13