

Tentamensskrivning i Linjär Algebra II (MAM220)

OBS: Detta är en skrivning på den **nya** kursen Linjär Algebra II, men kursbok av Lorenzo Sadun. Den är inte avsedd för en tidigare 10-poängskurs!

Teoriuppgifter

1. Visa att om A och P är $n \times n$ -matriser och om $B = PAP^{-1}$ så har A och B samma egenvärden. Visa också att om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A så är $P\mathbf{v}$ en egenvektor till B . (3p)
2. Låt P vara en reell $n \times n$ -matris och betrakta $\mathbb{R}^n$ med standardskalärprodukten $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$. Förklara vad som menas med att P är ortogonal? Hur ser en godtycklig ortogonal matris ut i fallet $n = 2$? Visa sedan (för ett allmänt n) att vart och ett av följande villkor är ekvivalent med att P är ortogonal!
 - (a) $|P\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$, för alla $\mathbf{x}$
 - (b) $\langle P\mathbf{x} | P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$, för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y}$
 - (c) $PP^T = I$ (enhetsmatrisen)(4p)

Problemuppgifter

3. Den linjära operatören L på $\mathbb{R}^3$ har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

i basen

$$(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T$$

Bestäm matrisen för L i standardbasen i $\mathbb{R}^3$! (3p)

4. Låt a och b vara godtyckliga reella tal. Finn egenvärdena och en bas av egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} a & bi \\ -bi & a \end{pmatrix}$$

(3p)

5. Definiera följderna $\mathbf{x}(n)$ med formeln $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$ där

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Visa att A har egenvärdena 0.5 och 1 och bestäm gränsvärdet av $\mathbf{x}(n)$ då $n \rightarrow \infty$.

(3p)

VÄND!

6. På det linjära rummet $\mathbb{R}_2[t]$ av alla reella andragradspolynom p betraktar man skalärprodukten

$$\langle p|q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt$$

Låt J vara underrummet av alla jämna andragradspolynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = t$ på J . (3p)

7. Konstruera en Hermitesk operator L på $\mathbb{C}^3$ (med standardskalärprodukten) sådan att

- (a) det ortogonala komplementet till värdemängden för L spänns upp av $(1, i, 0)^T$
- (b) 1 är ett egenvärde av multipliciteten 2.

Beräkna sedan $L(\mathbf{x})$ om $\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T$! (3p)

8. En linjär operator L på $\mathbb{R}^3$ (med standardskalärprodukten) är symmetrisk och $L \circ L$ är identitetsoperatoren I . Visa att L antingen själv är $\pm I$ eller också är L spegling i en linje eller ett plan genom origo!

(3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad onsdagen den 23 januari.

Resultaten anslås då i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC).

Du kan också få veta resultatet genom att ringa nummer 772 35 93.

Din rättade skrivning kan hämtas efter angivet datum i mottagningsrummet (MC rum 1202D) , måndag - fredag kl. 12.30 - 13