3. Matrisens utseende visar att $L(b_1)=b_1$, $L(b_2)=3b_2$, $L(b_3)=-2b_3$ där $b_1=(1,1,0)^T$, $b_2=(1,0,1)^T$, $b_3=(0,1,1)^T$

Eftersom $e_1=\frac{1}{2}(b_1+b_2-b_3)$, $e_2=\frac{1}{2}(b_1-b_2+b_3)$, $e_3=\frac{1}{2}(-b_1+b_2+b_3)$

ger detta att
$$L(e_1)=\tfrac{1}{2}(b_1+3b_2+2b_3)=(2,3/2,5/2)^T$$
$$L(e_2)=\tfrac{1}{2}(b_1-3b_2-2b_3)=(-1,-1/2,-5/2)^T$$
$$L(e_3)=\tfrac{1}{2}(-b_1+3b_2-2b_3)=(1,-3/2,1/2)^T.$$

Matrisen för L i standardbasen är alltså
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 5/2 & -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

---

4. Matrisen kan skrivas $aI+bA$, där $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Den har därför samma egenvektorer som A och egenvärden av formen $\mu=a+b\lambda$ där λ är egenvärde till A.

Det karakteristiska polynomet för A är

$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -i \\ i & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1$. Egenvärdena till A är alltså ± 1.

Eftersom $1\cdot I-A=\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är $v_1=\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ en egenvektor till egenvärdet 1. Eftersom A är Hermitesk måste egenvektorer till egenvärdet -1 vara ortogonala mot v_1. Som egenvektor till -1 kan vi alltså ta $v_{-1}=\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$.

Den givna matrisen har alltså egenvärdena $a\pm b$. En bas av egenvektorer är $(i,1)^T$, $(i,-1)^T$.

---

5. Eftersom diagonalsumman, dvs summan av egenvärdena, är 2, bör egenvärdena vara 0.5, 0.5, 1. Bilda därför först
$$0.5I-A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta visar att 0.5 är ett egenvärde med geometrisk multiplicitet 2, och att motsvarande egenrum är planet $x_1+2x_2+x_3=0$

Det följer att det tredje egenvärdet är 1. Eftersom
$$I-A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
är $v_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en egenvektor till egenvärdet 1.

Nu är $x(0)=(0,1,0)^T=v_1+w$ där $w=(1,0,-1)^T$ ligger i planet $x_1+2x_2+x_3=0$, dvs w är en egenvektor till egenvärdet 0.5. Alltså är
$$x(n)=v_1+(0.5)^n w \longrightarrow v_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Som bas i J tar vi $p_1(t)=1$, $p_2(t)=t^2$. De är visserligen inte ortogonala men det rättar vi till nu:

Sätt $q_1 = p_1$ och $q_2 = p_2 - \frac{\langle q_1|p_2\rangle}{\langle q_1|q_1\rangle} q_1 = t^2 - \frac{1}{3}$.

Den ortogonala projektionen av $p(t)=t$ blir

$$P_J(p) = \frac{\langle q_1|p\rangle}{\langle q_1|q_1\rangle} q_1 + \frac{\langle q_2|p\rangle}{\langle q_2|q_2\rangle} q_2 = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{9}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right) = \frac{15}{16}t^2 + \frac{3}{16}$$

---

7. Eftersom $L^\dagger = L$ (L är Hermitesk) och $(\text{Range}(L^\dagger))^\perp = \ker(L)$ så måste enl. (a) $\ker(L) = (\text{Range}(L))^\perp = \text{Span}\{(1,i,0)^T\}$.
Alltså är $(1,i,0)^T$ en egenvektor med egenvärdet 0.
Dessutom skall enl. (b) L ha det dubbla egenvärdet 1.
För att underlätta beräkningen av $L(x)$ om $x=(0,0,1)^T$ antar vi att $(0,0,1)^T$ är en egenvektor med egenvärdet 1.
Vi ansätter då att matrisen för L har formen

$$PDP^\dagger \text{ där } D = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&\bullet&0\\ i&\bullet&0\\ 0&\bullet&2 \end{pmatrix}$$

Vektorn som maskerats med prickar måste vara ortogonal mot de två andra vektorerna, alltså

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&-1&0\\ i&i&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}$$

Alltså: vi kan välja den operator vars standardmatris är

$$[L] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&-1&0\\ i&i&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&-i&0\\ -1&-i&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&i&0\\ -i&1&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}$$

Då är $Lx = x$, om $x = (0,0,1)^T$.

---

8. Eftersom L är symmetrisk finns en ortogonal bas v_1, v_2, v_3 av egenvektorer med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Vi antar att $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Eftersom $L\circ L = I$ har vi att $v_j = L\circ L(v_j) = \lambda_j L(v_j) = \lambda_j^2 v_j$. Alltså är $\lambda_j^2 = 1$ dvs $\lambda_j = \pm 1$.

Om $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ så är $L(x) = c_1\lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3$.

Fall 1 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \Rightarrow L(x) = x$ dvs $L = I$

Fall 2 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \Rightarrow L(x) = c_1 v_1 + c_2 v_2 - c_3 v_3 \Rightarrow L$ är spegling i $\text{Span}\{v_1, v_2\}$

Fall 3 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \Rightarrow L(x) = c_1 v_1 - c_2 v_2 - c_3 v_3 \Rightarrow L$ är spegling i $\text{Span}\{v_1\}$

Fall 4 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \Rightarrow L(x) = -x \Rightarrow L = -I$.

Linjär algebra II (MAM 220), 2001-10-27

1. Antag att $Hu = \lambda u$, $Hv = \mu v$ där $u \neq 0$, $v \neq 0$. Då är

$$\lambda\langle v|u\rangle = \langle v|\lambda u\rangle = \langle v|Hu\rangle = \underset{H^\dagger = H}{\langle H^\dagger v|u\rangle =} \langle Hv|u\rangle = \langle \mu v|u\rangle = \bar{\mu}\langle v|u\rangle.$$

Med $u = v$, $\mu = \lambda$ ger denna kalkyl till att $\lambda = \bar{\lambda}$.
Alltså är egenvärdet λ reellt. Med $\lambda \neq \mu$, $(u \neq v)$ ger denna kalkyl $\lambda\langle v|u\rangle = \mu\langle v|u\rangle$ $(\bar{\mu} = \mu)$, varav $\langle v|u\rangle = 0$. VSB

---

2. (a) A är en sannolikhetsmatris om alla elementen ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$ och om kolonnsummorna i A är 1.

(b) Om $e = (1,1,\cdots,1)^T$ så är $A^T e = e$, (eftersom kolonnsummorna är 1). Därför är 1 ett egenvärde till A^T. Men A och A^T har samma egenvärden. Alltså har A egenvärdet 1.

(c) Elementet på plats r,k i A^2 är en summa av produkter av elementen i A. Alltså är elementet på plats r,k inte negativt. Vidare är

$$(A^2)^T e = A^T A^T e = A^T e = e,$$

vilket visar att kolonnsummorna i A^2 lika med 1. Därför måste A^2 vara en sannolikhetsmatris.

---

3. Systemets matris $A = \begin{pmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & -0.1 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $0, -0.5$.
Motsvarande egenvektorer är (exempelvis) $V_1 = (1,-2)^T$, $V_2 = (2,1)^T$.
Eftersom $(1,1)^T = -\frac{1}{5}V_1 + \frac{3}{5}V_2$ har lösningarna formen

$$(x(t), y(t))^T = -\frac{1}{5}V_1 + \frac{3}{5}e^{-0.5t}V_2 \rightarrow -\frac{1}{5}V_1, \quad \text{då } t \to \infty$$

Alltså: $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\frac{1}{5}$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{5}$.

---

4. Om $b_1 = (-1,1,0)^T$, $b_2 = (1,0,-1)^T$, $b_3 = (0,1,1)^T$ så är
$L(b_1) = (-2,2,0)^T = 2b_1$, $L(b_2) = (-2,0,2)^T = -2b_2$
$L(b_3) = (2,6,0)^T = 2b_1 + 4b_2 + 4b_3$. Alltså är matrisen för L i basen $\{b_1, b_2, b_3\}$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

---

5. Eftersom $\begin{pmatrix} 1+i & z \\ -z & 1+i \end{pmatrix} = (1+i)I + zA$ där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ räcker det att diagonalisera A. Egenvärdena till A är $\pm i$. Motsvarande egenvektorer $v_1 = (1,i)^T$, $v_2 = (-1,i)^T$ (exempelvis). Alltså är

$$\begin{pmatrix} 1+i & z \\ -z & 1+i \end{pmatrix} = PDP^{-1} \text{ där } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1+i+zi & 0 \\ 0 & 1+i-zi \end{pmatrix}$$

6. Sätt $v_1 = (1,2,0,3)^T$, $v_2 = (2,-1,1,0)^T$, $v_3 = (5,0,2,3)^T$. Vi har att $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$. Den ortogonala projektionen $\hat{v}_3$ av v_3 på $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ är därför

$$\hat{v}_3 = \frac{\langle v_1 | v_3 \rangle}{\langle v_1 | v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle v_2 | v_3 \rangle}{\langle v_2 | v_2 \rangle} v_2 = \frac{14}{14} v_1 + \frac{12}{6} v_2 = v_1 + 2v_2 = v_3 .$$ OBS

Alltså är $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$. Matrisen för den ortogonala projektionen på $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ är därför

$$P = \frac{1}{14} v_1 v_1^T + \frac{1}{6} v_2 v_2^T = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

7. Sätt $(Tq)(t) = (q(-1) + q(0) + 2q(1))(1-t^2)$. Då är T en linjär operator på $\mathbb{R}_2[t]$ och

$$\langle Tq | p \rangle = (q(-1) + q(0) + 2q(1))\, p(0) \quad \text{eftersom } (Tq)(\pm 1) = 0.$$

Samtidigt är

$$\langle q | Lp \rangle = q(-1)p(0) + q(0)p(0) + 2q(1)p(0) \quad \text{om } Lp = p(0).$$

Detta visar att $\langle Tq | p \rangle = \langle q | Lp \rangle$. Alltså är $L^+ = T$.

Nu är $(\mathrm{Ker}(L))^\perp = \mathrm{Range}(L^+) = \mathrm{Span}\{1-t^2\}$. Den ortogonala projektionen av $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ på $\mathrm{Span}\{1-t^2\}$ är

$$\underline{\underline{y(t)}} = \frac{\langle 1-t^2 | p \rangle}{\langle 1-t^2 | 1-t^2 \rangle}(1-t^2) = a_0(1-t^2)$$

Sätter vi $\underline{w(t)} = p(t) - y(t) = a_1 t + (a_2 + a_0)t^2$ så har vi att

$$p(t) = w(t) + y(t) \quad \text{där } w \in \mathrm{Ker}(L),\ y \in (\mathrm{Ker}(L))^\perp$$

---

8. Låt $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ vara egenvärdena till A. Det finns en ortogonal diagonalisering $A = PDP^T$ av A. Sätt $x = Py$. Då är $|y|^2 = |x|^2$ och $x^T A x = y^T D y$. Alltså är M det största värdet av $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$ på området $y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \le 1$. Men

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2) \le$$
$$\le \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2) \le \frac{1}{\lambda_1}.$$

Här gäller likhet om $y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $y_2 = \cdots = y_n = 0$. Alltså är $M = \frac{1}{\lambda_1}$ (inverterade värdet av det minsta egenvärdet).

Detta värde antas i $y = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1$ dvs $x = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} P e_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} v_1$, där v_1 är en normerad egenvektor till det minsta egenvärdet λ_1.