

MAM 220, 031025

3. Låt $A = -\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 0$, $\text{tr}(A) = -0.5 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.5$.

Samt $v_1 = (1 \ -2)^t$, $v_2 = (2 \ 1)^t$.

Skriv $(1 \ 1) = -\frac{1}{5}(1 \ -2)^t + \frac{3}{5}(2 \ 1)^t$.

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.5t}$

$\rightarrow -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty}$

4 $[L]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P_L(\lambda) = \lambda^4 + 1$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$.

$\left. \begin{aligned} v_1 &= (1 \ 1 \ 1 \ 1)^t, & v_2 &= (1 \ -1 \ 1 \ -1)^t \\ v_3 &= (i \ 1 \ i \ -1)^t, & v_4 &= (-i \ 1 \ -i \ -1)^t \end{aligned} \right\}$

5 $A = \frac{1}{6}B$ där $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Låt μ_1, μ_2, μ_3 vara egenvärdena till B .

Kol. summa i $B = 6 \Rightarrow \mu_1 = 6$.

$\text{tr}(B) = 8$, $\det(B) = 18 + 27 - 9 = 36$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu_2 + \mu_3 = 2 \\ \mu_2 \cdot \mu_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \mu_2 &= 1 + \sqrt{-5} \\ \mu_2 &= 1 - \sqrt{-5} \end{aligned}$

$\therefore A$'s egenvärden ges av $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{-5}}{6}, \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{-5}}{6}$.

$|\lambda_2|, |\lambda_3| < 1 \Rightarrow x(n) \rightarrow \alpha_1 v_1$

där $x(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ (och $Av_i = \lambda_i v_i$)

$Av_1 = 1 \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = (3 \ 4 \ 3)^t$

kol. sum $(\alpha_1 v_1) = \text{kol. sum}(x(0)) = 1$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 = \frac{1}{10} (3 \ 4 \ 3)^t$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \frac{1}{10} (3 \ 4 \ 3)^t$

$$\underline{6} \quad P_B(\mu) = \mu^2 - 2a\mu + a^2 + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = a + ib \text{ eller } \mu_2 = a - ib.$$

$$Bv_1 = (a + ib)v_1 \Rightarrow v_1 = (1 \ i)^t$$

$$Bv_2 = (a - ib)v_2 \Rightarrow v_2 = (1 \ -i)^t$$

Egenvärden till A : $\lambda_1 = e^{\mu_1} = e^{a+ib}$, $\lambda_2 = e^{\mu_2} = e^{a-ib}$
 Egenvektorer är samma som för B !

$$\underline{7} \quad b_1 = 1, \quad b_2 = t, \quad b_3 = \underline{t^2 - 1/3}$$

är ortogonala.

Notera: $P_W(t^2 + t + 1) = t^2 + t + 1$ då $t^2 + t + 1 \in W$.

$$P_W(t^3) = \frac{\langle b_1, t^3 \rangle}{\|b_1\|^2} \cdot 1 + \frac{\langle b_2, t^3 \rangle}{\|b_2\|^2} \cdot b_2 + \frac{\langle b_3, t^3 \rangle}{\|b_3\|^2} \cdot b_3$$

$$\langle b_1, t^3 \rangle = \langle b_3, t^3 \rangle = 0$$

$$\|b_2\|^2 = \int t^2 dt = 2/3$$

$$\langle b_2, t^3 \rangle = \int t^4 dt = 2/5$$

$$\therefore P_W(t^3) = \frac{2/5}{2/3} \cdot b_2 = 3/5 \cdot t$$

$$\therefore P_W(t^3 + t^2 + t + 1) = 3/5 \cdot t + t^2 + t + 1 = t^2 + 8/5 t + 1$$

$$\underline{8} \quad \text{Låt } B = A/\lambda_1. \quad B\text{'s egenvärden ges av } \mu_i = \lambda_i/\lambda_1;$$

dessutom har A och B samma egenvektorer $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Vi kan välja $x(0) \geq 0$ så att $x(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ med $\alpha_i \geq 0$.

Låt $x(n) = B^n x(0)$. $A \geq 0 \Rightarrow B \geq 0$; $x(0) \geq 0$

$\Rightarrow B^n x(0) = x(n) \geq 0$. Å andra sidan: $x(n) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{i,1}}\right)^n v_i \cdot \alpha_i$

då n stort; och eftersom $(\lambda_i/\lambda_{i,1})^n$ växlar

tecken om $\lambda_i < 0$, medan $\lambda_i > 0$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \alpha_1 v_1; \quad x(n) \geq 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 \geq 0$$

$\therefore$ Om vi låter $v'_1 = \alpha_1 v_1$ så är $v'_1 \geq 0$ och

$$Av'_1 = \lambda_1 v'_1.$$