

Teoriuppgifter

1. Definera först vad som menas med en Hermitsk matris! Visa sedan att en godtycklig Hermitsk matris har reella egenvärden och är diagonaliserbar!

(3p)

2. Låt A och B vara två kvadratiske matriser som kommuterar. Visa att B avbildar varje egenrum till A på sig självt. (OBS: Det är inte sagt att A eller B är diagonaliserbara!)

(3p)

Problemuppgifter

3. Betrakta den linjära operator L på $\mathbb{R}^3$ som defineras av

$$L((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3)^T$$

Bestäm matrisen för L i basen

$$(-1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T$$

(3p)

4. Definera följderna $x(k)$ med formeln $x(k+1) = Ax(k)$ där

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Visa att A har egenvärdena 0.5 och 1 och bestäm gränsvärdet av $x(k)$ då $k \rightarrow \infty$.

(3p)

5. Låt z vara ett godtyckligt komplext tal. Diagonalisera (dvs finn egenvärden och egenvektorer till) matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & z \\ -z & 1+i \end{pmatrix}$$

(3p)

6. Visa först att matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

representerar en rotation på $\mathbb{R}^3$. Finn sedan rotationsaxel och rotationsvinkel.

(3p)

Vänd!

7. På det linjära rummet $\mathbb{R}_2[t]$ av alla reella andragradspolynom p betraktar man skalärprodukten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

Låt L vara underrummet av alla linjära polynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = t^2$ på L .

(3p)

8. Låt A vara en reell symmetrisk 3×3 matris med följande egenskaper:

$$A^2 = A, \quad A \neq 0, \quad \text{Range}(A) \neq \mathbb{R}^3$$

Visa att A är en ortogonal projektion på en linje eller ett plan. (Ledtråd: Vad kan du säga om egenvärdena till A ?)

(3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad fredagen den 1 november. Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 1 november. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon, tel. 772 3593 efter kl. 14.00.