

Teoriuppgifter

1. Låt V och W vara vektorrum och låt $L : V \rightarrow W$ vara en linjär avbildning från V till W . Visa att bilden av L är isomorf till kvotrummet $V/\text{Ker}(L)$.

(3p)

2. Låt A och B vara två diagonaliserbara kvadratiske matriser som kommuterar. Visa att A och B är *simultant* diagonaliserbara.

(3p)

Problemuppgifter

3. Finn minstakvadratlösningen till

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(3p)

4. Betrakta följande tidskontinuerliga dynamiska system där a och b är reella parametrar:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x'(t) + ay(t), \quad x(0) = 1, \\ y'(t) &= ax(t) - 4y(t), \quad y(0) = b, \end{aligned} \tag{1}$$

Man vet att $x(t) \rightarrow -2$, $y(t) \rightarrow 1$ då $t \rightarrow \infty$. Vilka värden måste a och b ha? Bestäm lösningen för dessa parametervärden.

(3p)

5. På $\mathbb{R}^4$ defineras den linjära avbildningen

$$L(x) = x_1 + x_3 + x_4$$

Låt P vara den ortogonala projektionen på kärnan (nollrummet) till L . Finn en ortogonal diagonalisering av P .

(3p)

Vänd!

6. Låt a och b vara godtyckliga reella tal. Diagonalisera (dvs finn egenvärden och egenvektorer till) matrisen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(3p)

7. Betrakta rummet $\mathbb{R}_3[t]$ av alla reella tredjegradspolynom i t . Definera operatören $L : \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$ genom att sätta $L(p) = q$ där

$$q(t) = t^2 p''(t) + p'(t) + p(t).$$

Bestäm egenvärdena och motsvarande egenrum till L .

(3p)

8. Låt A vara en reell symmetrisk $n \times n$ matris med positiva egenvärden. Visa att det finns en matris B så att $A = B^2$.
- (3p)

Skrivningen beräknas vara färdiggrättad fredagen den 7 februari. Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 7 februari. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon, tel. 772 3593 efter kl. 14.00.