

Teoriuppgifter

1. Definera först vad som menas med en Hermitsk matris! Visa sedan att en godtycklig Hermitsk matris har reella egenvärden och är diagonaliserbar!

(3p)

2. Låt A vara en reell $m \times n$ matris, och låt $b \in \mathbb{R}^m$. Visa att x är en minsta-kvadrat lösning till $Ax = b$ om och endast om x är en lösning till $A^t Ax = A^t b$!

(3p)

Problemuppgifter

3. Visa att lösningen till systemet

$$\begin{cases} dx/dt &= -0.4x(t) - 0.2y(t), & x(0) = 1 \\ dy/dt &= -0.2x(t) - 0.1y(t), & y(0) = 1 \end{cases}$$

har ett gränsvärde då $t \rightarrow \infty$ och bestäm detta gränsvärde!

(3p)

4. Definera $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ genom

$$L((x_1, x_2, x_3, x_4)^t) = (x_2, x_3, x_4, x_1)^t.$$

Vad är L 's matris i standardbasen (dvs basen $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$) för $\mathbb{R}^4$? Bestäm sedan L 's egenvärden och egenvektorer!

(3p)

5. Låt $x(n) = A^n x(0)$ där $x(0) = (0, 1, 0)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$!

(3p)

Vänd!

6. Låt a, b vara godtyckliga reella tal. Finn egenvärdena och en bas av egenvektorer till matrisen $A = e^B$ då $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
7. På det linjära rummet $\mathbb{R}_3[t]$ av alla reella tredjegradspolynom p betraktar man skalärprodukten

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$$

Låt W vara underrummet av alla andragradspolynom. Bestäm den ortogonala projektionen av $p(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ på W .

(3p)

8. Låt $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ vara en positiv $n \times n$ matris, dvs $a_{ij} > 0$ för alla $1 \leq i, j \leq n$. Antag att A är diagonaliserbar, med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, där $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ för $i = 2, 3, \dots, n$. Visa att λ_1 är ett positivt reellt tal, och att den motsvarande egenvektorn v_1 kan väljas icke-negativ, dvs $Av_1 = \lambda_1 v_1$ för något $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, så att $x_i \geq 0$ för $1 \leq i \leq n$.

(3p)

Skrivningen beräknas vara färdiggrättad fredagen den 31 oktober. Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 7 februari. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon, tel. 772 3593 efter kl. 14.00.