Övningar i Reell analys, vt-04.

Kapitel 1

1. Ange (i den mån de existerar) supremum, infimum, största element och minsta element till följande delmängder av $\mathbb{R}$.

   (a) $\{\frac{n}{n+1};\ n = 1, 2, \ldots\}$

   (b) $\{\frac{x}{x+1};\ x > 0\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{Q};\ x \leq \pi\}$

2. Bestäm $\sup\{a_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ och $\inf\{a_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ om

   (a) $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

   (b) $a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$

   (c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n}$

3. Finn supremum och infimum av följande mängder

   (a) $\{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r};\ p, q, r \in \mathbb{Z}^+\}$

   (b) $\{x;\ 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$

4. Visa att mängden $\{x \in \mathbb{Q};\ \ x^2 < 2\}$ inte har någon minsta rationell majorant, genom att visa att om r vore en sådan så skulle $r^2 = 2$.

5. I konstruktionen av $\mathbb{R}$ definieras $\alpha > 0$ för $\alpha \in \mathbb{R}$ som $(a_n) > 0$ (för definition av detta se stencilen), där $\alpha = [a_n]$. Visa att definitionen är oberoende av valet av representant (a_n) för α.

6. Visa Lemma 4 i föreläsningsanteckningarna.

7. Rudin kap 1: uppgift 1, 5, 8 och 9.

Kapitel 2

1. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa att

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ och } f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

   för alla $A, B \subseteq S$.

2. Betrakta funktionen $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{om } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{om } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Bestäm följande mängder

$$f^{-1}(\{2\}),\ f^{-1}([1, \infty)),\ f^{-1}([0, 1/2]).$$

3. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa följande två formler.

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \text{ för alla } X \subseteq S$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \text{ för } Y_1, Y_2 \subseteq T$$

4. (a) Betrakta funktionen $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{om } -1 \le x \le 1,\ x \text{ rationellt} \\ -x & \text{om } -1 \le x \le 1,\ x \text{ irrationellt} \end{cases}$$

Visa att f är en-entydig och bestäm inversen f^{-1}.

(b) Betrakta funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definierad genom

$$f(x) = n \text{ om } n - 1 \le x < n,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bestäm $f([0, p])$ och $f^{-1}([0, p])$ för varje positivt tal p.

5. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa att följande tre villkor är ekvivalenta.

(a) f är en-entydig.

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ för alla $A, B \subseteq S$.

(c) $f^{-1}(f(A)) = A$ för alla $A \subseteq S$.

6. Visa att varje oändlig mängd har en uppräknelig delmängd.

7. Låt S vara en oändlig mängd. Visa att det finns en äkta delmängd T av S som har samma kardinalitet som S.

8. Ett reellt tal x kallas *algebraiskt* om det finns heltal $a_0, \ldots, a_n$, ej alla noll, sådana att

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$

Visa att mängden av (reella) algebraiska tal är uppräknelig.

Komplexa algebraiska tal definieras analogt, och omfattar förstås de reella algebraiska talen. Är de också uppräkneliga?

9. Visa att det finns reella tal som inte är algebraiska. Sådana tal kallas *transcendenta*. “Hur många” transcendenta tal finns det?

10. Låt S vara mängden av funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Visa att S inte har samma kardinalitet som $\mathbb{R}$.

11. För en mängd S betecknas mängden av delmängder till S med $\mathcal{P}(S)$. Visa att $\mathcal{P}(S)$ inte har samma kardinalitet som S.

    Anm. De två sista uppgifterna är ganska(!) svåra. Om du kör fast, så ersätt $\mathbb{R}$ i 10) med en ändlig mängd, och betrakta enbart ändliga mängder i 11).

12. Låt V vara ett vektorrum. En *norm* på V är en reellvärd funktion $\|v\|$ på V som uppfyller följande:

    (a) $\|v\| \geq 0$ för alla $v \in V$.

    (b) $\|v\| = 0$ om och endast om $v = 0$.

    (c) $\|av\| = |a|\|v\|$ för alla $a \in \mathbb{R}$ och $v \in V$.

    (d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ för alla $v, w \in V$.

    Visa att
    $$d(v, w) = \|v - w\|$$
    definierar en metrik på det normerade rummet V.

13. Visa att
    $$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
    och
    $$d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$
    definierar metriker på $\mathbb{R}^2$. Hur ser öppna bollar ut i respektive metrik?

14. Betrakta delmängden S i $\mathbb{R}^2$ där
    $$S = \{(x, y);\ 0 < x < 1,\ y \in \mathbb{R}\}$$
    Visa att S är öppen.

15. Låt M vara ett metriskt rum. Visa att M och $\emptyset$ är både öppna och slutna.

16. Bestäm alla isolerade punkter i och hopningspunkter till följande delmängder av $\mathbb{R}$.

    (a) $\mathbb{Z}$

    (b) $\{\frac{1}{n};\ n = 1, 2, \ldots\}$

    (c) $\mathbb{Q}$

17. Bestäm alla hopningspunkter till följande mängder i $\mathbb{R}$.

(a) $\{(-1)^n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

(b) $\{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

(c) $\{(-1)^n + \frac{1}{m};\ n, m \in \mathbb{Z}^+\}$

18. Vilka av följande delmängder av $\mathbb{R}$ är slutna? Vilka är öppna? Bestäm också alla hopningspunkter.

    (a) $(a, b]$

    (b) $\mathbb{Q}$

    (c) $\{1/n + 1/2^n;\ n = 1, 2, \ldots\}$

19. (a) Visa att i $\mathbb{R}^n$ gäller $\overline{B(a,r)} = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ |a - x| \le r\}$ för alla punkter $a \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. Kan man generalisera påståendet till godtyckliga normerade vektorrum?

    (b) Ge exempel på ett metriskt rum där motsvarande inte gäller.

20. Låt M vara ett metriskt rum, och S en delmängd till M. En punkt $x \in M$ sägs vara en *randpunkt* till S om varje omgivning till x innehåller minst en punkt ur vardera S och S^c. Mängden av randpunkter till S brukar betecknas $\partial(S)$. Visa att

    (a) $\partial(S) = \overline{S} \cap \overline{S^c}$.

    (b) S är sluten om och endast om $\partial(S) \subseteq S$.

21. Betrakta det metriska delrummet M av $\mathbb{R}^2$ där

    $$M = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 1,\ x \neq 1\}.$$

    Sätt

    $$S = \{(x, y) \in M;\ y \ge 0\}.$$

    Visa att $\mathrm{int}(S) = \{(x, y) \in M;\ y > 0\}$ och att $\partial(S) = \{(-1, 0)\}$.

22. Rudin kap 2: uppgift 5, 6, 7, 8, och 9.

23. Visa att $\mathcal{F} = \{(1/n, 2/n);\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ är en öppen övertäckning av intervallet $(0, 1)$. Visa också att ingen ändlig delmängd av $\mathcal{F}$ täcker $(0, 1)$.

24. Betrakta $\mathbb{Q}$ som ett metriskt delrum till $\mathbb{R}$. Låt $E = \{p \in \mathbb{Q}\ ;\ \sqrt{2} < p < \sqrt{3}\}$. Visa att E är sluten och begränsad, men inte kompakt, i $\mathbb{Q}$. Är E öppen i $\mathbb{Q}$?

25. Betrakta det metriska rummet $M = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < 1\}$ med metriken $d(z, w) = |z - w|$. Sätt

    $$S = \{z \in M;\ |z| \le 1/2\}.$$

    Visa att S är sluten och begränsad men inte kompakt. Bestäm också det inre $\mathrm{int}(S)$, och randen $\partial(S)$.

26. Låt K_1 och K_2 vara två kompakta mängder i ett metriskt rum. Visa att $K_1 \cup K_2$ är kompakt.

27. Ge exempel på en sluten (äkta) delmängd S av $\mathbb{R}$ sådan att S har en uppräknelig öppen övertäckning som inte kan reduceras till en ändlig delövertäckning.

28. Låt p vara ett positivt reellt tal. Betrakta familjen

$$\mathcal{F} = \{(x - p, x + p);\ x \in \mathbb{R}\}$$

Visa att $\mathcal{F}$ är en öppen övertäckning av $[0, 1]$ och finn en ändlig delövertäckning.

29. (a) Visa att varje ändlig delmängd av $\mathbb{R}^n$ är kompakt.
    Gäller detta (dvs att ändliga delmängder är kompakta) i vilket metriskt rum som helst?
    (b) Ge exempel på en uppräknelig och begränsad mängd i $\mathbb{R}^n$ som inte är kompakt.

30. Cantormängden $\mathcal{C}$ konstrueras på följande sätt. Starta med intervallet $I_0 = [0, 1]$. Dela nu I_0 i tre lika delar och ta bort det öppna mittersta intervallet $(1/3, 2/3)$. Vi har nu kvar de två slutna intervallen $[0, 1/3]$ och $[2/3, 1]$. Dela nu vart och ett av dessa två intervall i tre lika delar och uteslut de öppna mitt-intervallen. Vi har nu fyra slutna intervall. Upprepa nu detta förfarande ad infinitum. Den mängd som återstår är Cantormängden $\mathcal{C}$. Visa att $\mathcal{C}$ är kompakt och saknar isolerade punkter.

31. Rudin kap 2: uppgift 10, 12, 13, 14, 15 och ev 29.

Kapitel 3

1. Konstruera en konvergent talföljd $\{a_n\}$ sådan att $S = \{a_n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ saknar hopningspunkter i $\mathbb{R}$.

2. Låt M vara ett metriskt rum och $E \subseteq M$. Visa att en punkt p (i M) ligger i $\bar{E}$, slutna höljet av E, om och endast om det finns en följd $\{p_n\}$ i E som konvergerar mot p (i M).

3. Låt I_0 vara intevallet $[0, 1]$. Dela nu I_0 mitt itu och låt I_1 vara den vänstra halvan (inklusive ändpunkter). Dela nu I_1 mitt itu och låt I_2 vara den högra halvan (inklusive ändpunkter). Upprepa halverandet och tag den vänstra halvan varannan gång och den högra halvan varannan gång. Bestäm den punkt som är gemensam för alla de på detta sätt konstruerade intervallen.

4. Låt $\{p_n\}$ vara en följd i ett normerat rum. Visa att $\{\|p_n\|\}$ är konvergent (i $\mathbb{R}$) om $\{p_n\}$ är konvergent. Gäller omvändningen?

5. Antag att $p_n \to p$ och $q_n \to q$ i ett metriskt rum (M, d). Visa att $d(p_n, q_n) \to d(p, q)$. (Jämför med uppgift 23 i Rudin kap 3.)

6. Visa att Cauchyföljder är begränsade.

7. Låt E vara ett metriskt delrum till M. Visa att E är sluten i M om E är fullständigt. Visa att även omvändningen gäller om M är fullständigt.

8. Rudin kap 3: uppgift 16a, 20, 23.

Kapitel 4

1. Visa att

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n);\ 1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\} \text{ är öppen i } \mathbb{R}^n$$

och att

$$T = \{(x_1, \ldots, x_n);\ 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\} \text{ är sluten i } \mathbb{R}^n.$$

2. Låt f vara kontinuerlig på $[0, 1]$ och antag att $f(x) = 0$ för alla rationella tal x. Visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [0, 1]$.

3. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Sätt

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) > 0\}$$

och

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) \geq 0\}.$$

Ge ett exempel där $\overline{S} = T$ och ett där $\overline{S} \neq T$.

4. Låt $f : X \to Y$. Visa att f inte är likformigt kontinuerlig på X om och endast om det finns $\epsilon > 0$ och följder $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ i X sådana att $d_X(p_n, q_n) \to 0$ men $d_Y(f(p_n), f(q_n)) \geq \epsilon$.

5. Avgör om följande funktioner är likformigt kontinuerliga.

   (a) $\ln x$ på $[1, \infty[$

   (b) $\ln x$ på $]0, 1]$

   (c) $\sqrt{x}$ på $[0, \infty[$

   (d) $x \sin(1/x^2)$ på $]0, \infty[$

6. Låt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och sätt $g(x) = \max\{f(y);\ 0 \leq y \leq x\}$. Visa att g är kontinuerlig.

7. Rudin kap 4: uppgift 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11.

8. Låt M vara ett metriskt rum och $f : M \to \mathbb{R}$. Visa att f är kontinuerlig på M om och endast om $f^{-1}((a,\infty))$ och $f^{-1}((-\infty,a))$ är öppna i M för alla reella tal a.

9. Låt X och Y vara metriska rum, och E en tät delmängd i X. Antag att $f : E \to Y$ är likformigt kontinuerlig och att Y är fullständigt. Visa att f har en entydig utvidgning till X som är likformigt kontinuerlig på X. (Jämför med övn 13 i Rudin; utnyttja eventuellt resultatet i Rudins övn 11.)

10. Använd idén i beviset av Urysohns lemma för att konstruera en kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ sådan att $f(x_1,x_2) = 0$ omm $\|(x_1,x_2)\| \leq 1$, och $f(x_1,x_2) = 1$ omm $x_1 = 2$. Ange funktionen explicit, samt avgör om den har partiella derivator i punkten $(2,0)$.

11. Låt A och B vara disjunkta icke-tomma slutna delmängder i ett metriskt rum M. Visa att det finns en kontinuerlig funktion $f : M \to [a,b]$ sådan att $A = f^{-1}(\{a\})$ och $B = f^{-1}(\{b\})$, för godtyckliga reella tal a och b, $a < b$.

12. Rudin kap 4: uppgift 14, 25a.

13. Rudin kap 2: uppgift 19, 20.

14. Visa att ett metriskt rum M är sammanhängande om och endast om M inte är en union av två icke-tomma öppna disjunkta mängder.

15. Vi har sett att i varje metriskt rum M gäller att $\emptyset$ och M är både öppna och slutna. Visa att M är sammanhängande om och endast om $\emptyset$ och M är de enda mängderna som är både öppna och slutna.

16. En mängd S i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *bågvis sammanhängande* om det till varje par av punkter a och b i S finns en kontinuerlig funktion $f : [0,1] \to S$ sådan att
$$f(0) = a \text{ och } f(1) = b.$$
Visa att varje bågvis sammanhängande mängd S i $\mathbb{R}^n$ är sammanhängande.

17. Omvändningen till påståendet i föregående uppgift gäller inte, vilket t.ex. inses genom att betrakta mängden
$$S = \{(x,y) : 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \cup \{(x,y) : -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$$
Visa att S är sammanhängande, men inte bågvis sammanhängande i $\mathbb{R}^2$. Rita en bild av S och tänk igenom påståendet!

18. Visa att varje öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$ är bågvis sammanhängande.

Kapitel 7

1. Undersök om följande två funktionsföljder konvergerar punktvis på $[0,1]$. Är konvergensen likformig?

   (a) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$

   (b) $g_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$

2. Visa att funktionsföljden $f_n(x) = n\sin(x/n)$ konvergerar likformigt på varje kompakt del av $\mathbb{R}$.

3. Undersök följande funktionsföljder med avseende på punktvis och likformig konvergens på S. Undersök också om konvergensen är likformig på varje kompakt del av S.

   (a) $f_n(x,y) = \frac{n+x^2}{n+y^2}, \quad S = \mathbb{R}^2$

   (b) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}, \quad S = (0,\infty)$

4. Visa att $f_n(x) = x^n$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $[0,1]$. Låt sedan g vara en godtycklig kontinuerlig funktion på $[0,1]$ sådan att $g(1) = 0$. Visa att $g_n(x) = x^n g(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

5. Låt c vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt

   $$f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1].$$

   Visa först att $f_n(x) \to 0$ punktvis på $[0,1]$. Undersök sedan för vilka c

   (a) $f_n(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \ = \ 0.$

6. Rudin kap 7: uppgift 1, 2, 3, 7, 20, 24.

Kapitel 9

1. Visa att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar i en punkt p om och endast om alla koordinatfunktionerna är differentierbara i p.

2. Låt $f(0,0) = (0,0)$ och $f(x,y) = (x/(1+y^2), y^2\ln(x^2+y^2))$ för övrigt. Visa att f är differentierbar i $\mathbb{R}^2$. Approximera f linjärt dels i en omgivning till punkten $(0,0)$, dels i en omgivning till punkten $(0,1)$.

3. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara definierad av $f(0) = v$ och $f(x) = x/|x|$ för övrigt. Visa att f är differentierbar överallt, utom i origo (oavsett hur vi väljer v). Bestäm Jacobimatrisen $Df(x)$ för $x \neq 0$.

4. Låt $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Sätt $f(x) = x \cdot L(x)$. Visa att f är differentierbar och bestäm $f'(x)$.

5. Rudin kap 9: uppgift 5, 6, 7.

6. Låt $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en inverterbar linjär avbildning. Gäller då $\|L^{-1}\| = \|L\|^{-1}$?

7. Sätt $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$. Visa att f har en lokal invers g i en omgivning av varje punkt på linjen $x_1 = 1$ utom i $(1, 0)$. Bestäm $Dg(b)$ om $b = f(1, a)$, $a \neq 0$.

8. Låt $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

   (a) Visa att f är lokalt inverterbar kring varje punkt i $\mathbb{R}^2$, men att f inte är injektiv (och därmed saknar global invers).

   (b) Bestäm den lokala inversen till f i en omgivning av $(0, 0)$.

9. Visa att ekvationen $2x^3+x^2y+2xy^2+3y^3 = 0$ i en omgivning av $(1, -1)$ definierar en funktion $y = g(x)$, som är deriverbar i en omgivning till $x = 1$. Bestäm $g'(1)$.

10. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1^3 - 2x_2x_3 + x_4^2 &= 2 \\ x_2^3 - 2x_1x_4 - x_3^3 &= -1 \end{cases}$$

i en omgivning av $x_0 = (1, 0, -1, 1)$. Visa att det finns en entydigt bestämd kontinuerligt differentierbar lösning

$$(x_1, x_2) = g(x_3, x_4)$$

och bestäm $Dg(-1, 1)$. Visa också att det finns en entydigt bestämd kontinuerligt differentierbar lösning

$$(x_3, x_4) = h(x_1, x_2)$$

i en omgivning av x_0.

11. Betrakta kurvan $C = \{(x, y) \; ; \; (x^2 + y^2 - 3x)^2 = x^2 + y^2\}$.

    (a) Visa att C har en lodrät tangent i punkten $(4, 0)$.

    (b) I vilka punkter $(a, b) \in C, \; a \geq 0$, är C lokalt graf till en funktion $y = g(x)$?

12. Rudin kap 9: uppgift 16, 23