Övningar i Reell analys, vt-04.

Kapitel 2

1. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa att

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ och } f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

för alla $A, B \subseteq S$.

2. Betrakta funktionen $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{om } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{om } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Bestäm följande mängder

$$f^{-1}(\{2\}),\ f^{-1}([1, \infty)),\ f^{-1}([0, 1/2]).$$

3. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa följande två formler.

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \text{ för alla } X \subseteq S$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \text{ för } Y_1, Y_2 \subseteq T$$

4. (a) Betrakta funktionen $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{om } -1 \le x \le 1,\ x \text{ rationellt} \\ -x & \text{om } -1 \le x \le 1,\ x \text{ irrationellt} \end{cases}$$

Visa att f är en-entydig och bestäm inversen f^{-1}.

(b) Betrakta funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definierad genom

$$f(x) = n \text{ om } n - 1 \le x < n,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bestäm $f([0, p])$ och $f^{-1}([0, p])$ för varje positivt tal p.

5. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa att följande tre villkor är ekvivalenta.

(a) f är en-entydig.

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ för alla $A, B \subseteq S$.

(c) $f^{-1}(f(A)) = A$ för alla $A \subseteq S$.

6. Visa att varje oändlig mängd har en uppräknelig delmängd.

7. Låt S vara en oändlig mängd. Visa att det finns en äkta delmängd T av S som har samma kardinalitet som S.

8. Ett reellt tal x kallas *algebraiskt* om det finns heltal $a_0, \ldots, a_n$, ej alla noll, sådana att
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$
Visa att mängden av (reella) algebraiska tal är uppräknelig.

   Komplexa algebraiska tal definieras analogt, och omfattar förstås de reella algebraiska talen. Är de också uppräkneliga?

9. Visa att det finns reella tal som inte är algebraiska. Sådana tal kallas *transcendenta*. "Hur många" transcendenta tal finns det?

10. Låt S vara mängden av funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Visa att S inte har samma kardinalitet som $\mathbb{R}$.

11. För en mängd S betecknas mängden av delmängder till S med $\mathcal{P}(S)$. Visa att $\mathcal{P}(S)$ inte har samma kardinalitet som S.

    Anm. De två sista uppgifterna är ganska(!) svåra. Om du kör fast, så ersätt $\mathbb{R}$ i 10) med en ändlig mängd, och betrakta enbart ändliga mängder i 11).

12. Låt V vara ett vektorrum. En *norm* på V är en reellvärd funktion $\|v\|$ på V som uppfyller följande:

    (a) $\|v\| \geq 0$ för alla $v \in V$.
    (b) $\|v\| = 0$ om och endast om $v = 0$.
    (c) $\|av\| = |a|\|v\|$ för alla $a \in \mathbb{R}$ och $v \in V$.
    (d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ för alla $v, w \in V$.

    Visa att
$$d(v, w) = \|v - w\|$$
definierar en metrik på det normerade rummet V.

13. Visa att
$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
och
$$d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$
definierar metriker på $\mathbb{R}^2$. Hur ser öppna bollar ut i respektive metrik?

14. Betrakta delmängden S i $\mathbb{R}^2$ där
$$S = \{(x, y);\ 0 < x < 1,\ y \in \mathbb{R}\}$$
Visa att S är öppen.

15. Låt M vara ett metriskt rum. Visa att M och $\emptyset$ är både öppna och slutna.

16. Bestäm alla isolerade punkter i och hopningspunkter till följande delmängder av $\mathbb{R}$.

    (a) $\mathbb{Z}$

    (b) $\{\frac{1}{n};\ n = 1, 2, \ldots\}$

    (c) $\mathbb{Q}$

17. Bestäm alla hopningspunkter till följande mängder i $\mathbb{R}$.

    (a) $\{(-1)^n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

    (b) $\{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

    (c) $\{(-1)^n + \frac{1}{m};\ n, m \in \mathbb{Z}^+\}$

18. Vilka av följande delmängder av $\mathbb{R}$ är slutna? Vilka är öppna? Bestäm också alla hopningspunkter.

    (a) $(a, b]$

    (b) $\mathbb{Q}$

    (c) $\{1/n + 1/2^n;\ n = 1, 2, \ldots\}$

19. (a) Visa att i $\mathbb{R}^n$ gäller $\overline{B(a,r)} = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ d(a,x) \leq r\}$ för alla punkter $a \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. Kan man generalisera påståendet till godtyckliga normerade vektorrum?

    (b) Ge exempel på ett metriskt rum där motsvarande inte gäller.

20. Låt M vara ett metriskt rum, och S en delmängd till M. En punkt $x \in M$ sägs vara en *randpunkt* till S om varje omgivning till x innehåller minst en punkt ur vardera S och S^c. Mängden av randpunkter till S brukar betecknas $\partial(S)$. Visa att

    (a) $\partial(S) = \overline{S} \cap \overline{S^c}$.

    (b) S är sluten om och endast om $\partial(S) \subseteq S$.

21. Betrakta det metriska delrummet M av $\mathbb{R}^2$ där

    $$M = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 1,\ x \neq 1\}.$$

    Sätt

    $$S = \{(x, y) \in M;\ y \geq 0\}.$$

    Visa att $\operatorname{int}(S) = \{(x, y) \in M;\ y > 0\}$ och att $\partial(S) = \{(-1, 0)\}$.

22. Rudin kap 2: uppgift 5, 6, 7, 8, och 9.

23. Visa att $\mathcal{F} = \{(1/n, 2/n);\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ är en öppen övertäckning av intervallet $(0, 1)$. Visa också att ingen ändlig delmängd av $\mathcal{F}$ täcker $(0, 1)$.

24. Betrakta $\mathbb{Q}$ som ett metriskt delrum till $\mathbb{R}$. Låt $E = \{p \in \mathbb{Q}\ ;\ \sqrt{2} < p < \sqrt{3}\}$. Visa att E är sluten och begränsad, men inte kompakt, i $\mathbb{Q}$. Är E öppen i $\mathbb{Q}$?

25. Betrakta det metriska rummet $M = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < 1\}$ med metriken $d(z, w) = |z - w|$. Sätt

$$S = \{z \in M;\ |z| \leq 1/2\}.$$

Visa att S är sluten och begränsad men inte kompakt. Bestäm också det inre $\text{int}(S)$, och randen $\partial(S)$.

26. Låt K_1 och K_2 vara två kompakta mängder i ett metriskt rum. Visa att $K_1 \cup K_2$ är kompakt.

27. Ge exempel på en sluten (äkta) delmängd S av $\mathbb{R}$ sådan att S har en uppräknelig öppen övertäckning som inte kan reduceras till en ändlig delövertäckning.

28. Låt p vara ett positivt reellt tal. Betrakta familjen

$$\mathcal{F} = \{(x - p, x + p);\ x \in \mathbb{R}\}$$

Visa att $\mathcal{F}$ är en öppen övertäckning av $[0, 1]$ och finn en ändlig delövertäckning.

29. (a) Visa att varje ändlig delmängd av $\mathbb{R}^n$ är kompakt.
    Gäller detta (dvs att ändliga delmängder är kompakta) i vilket metriskt rum som helst?
    (b) Ge exempel på en uppräknelig och begränsad mängd i $\mathbb{R}^n$ som inte är kompakt.

30. Cantormängden $\mathcal{C}$ konstrueras på följande sätt. Starta med intervallet $I_0 = [0, 1]$. Dela nu I_0 i tre lika delar och ta bort det öppna mittersta intervallet $(1/3, 2/3)$. Vi har nu kvar de två slutna intervallen $[0, 1/3]$ och $[2/3, 1]$. Dela nu vart och ett av dessa två intervall i tre lika delar och uteslut de öppna mitt-intervallen. Vi har nu fyra slutna intervall. Upprepa nu detta förfarande ad infinitum. Den mängd som återstår är Cantormängden $\mathcal{C}$. Visa att $\mathcal{C}$ är kompakt och saknar isolerade punkter.

31. Rudin kap 2: uppgift 10, 12, 13, 14, 15 och ev 29.