Övningar i Reell analys, vt-04.

Kapitel 3

1. Konstruera en konvergent talföljd $\{a_n\}$ sådan att $S = \{a_n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ saknar hopningspunkter i $\mathbb{R}$.

2. Låt M vara ett metriskt rum och $E \subseteq M$. Visa att en punkt p (i M) ligger i $\bar{E}$, slutna höljet av E, om och endast om det finns en följd $\{p_n\}$ i E som konvergerar mot p (i M).

3. Låt I_0 vara intevallet $[0, 1]$. Dela nu I_0 mitt itu och låt I_1 vara den vänstra halvan (inklusive ändpunkter). Dela nu I_1 mitt itu och låt I_2 vara den högra halvan (inklusive ändpunkter). Upprepa halverandet och tag den vänstra halvan varannan gång och den högra halvan varannan gång. Bestäm den punkt som är gemensam för alla de på detta sätt konstruerade intervallen.

4. Låt $\{p_n\}$ vara en följd i ett normerat rum. Visa att $\{\|p_n\|\}$ är konvergent (i $\mathbb{R}$) om $\{p_n\}$ är konvergent. Gäller omvändningen?

5. Antag att $p_n \to p$ och $q_n \to q$ i ett metriskt rum (M, d). Visa att $d(p_n, q_n) \to d(p, q)$. (Jämför med uppgift 23 i Rudin kap 3.)

6. Visa att Cauchyföljder är begränsade.

7. Låt E vara ett metriskt delrum till M. Visa att E är sluten i M om E är fullständigt. Visa att även omvändningen gäller om M är fullständigt.

8. Rudin kap 3: uppgift 16a, 20, 23.