Kapitel 4

1. Visa att

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n);\ 1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\} \text{ är öppen i } \mathbb{R}^n$$

   och att

$$T = \{(x_1, \ldots, x_n);\ 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\} \text{ är sluten i } \mathbb{R}^n.$$

2. Låt f vara kontinuerlig på $[0, 1]$ och antag att $f(x) = 0$ för alla rationella tal x. Visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [0, 1]$.

3. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Sätt

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) > 0\}$$

   och

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) \geq 0\}.$$

   Ge ett exempel där $\overline{S} = T$ och ett där $\overline{S} \neq T$.

4. Låt $f : X \to Y$. Visa att f inte är likformigt kontinuerlig på X om och endast om det finns $\epsilon > 0$ och följder $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ i X sådana att $d_X(p_n, q_n) \to 0$ men $d_Y(f(p_n), f(q_n)) \geq \epsilon$.

5. Avgör om följande funktioner är likformigt kontinuerliga.

   (a) $\ln x$ på $[1, \infty[$

   (b) $\ln x$ på $]0, 1]$

   (c) $\sqrt{x}$ på $[0, \infty[$

   (d) $x \sin(1/x^2)$ på $]0, \infty[$

6. Låt $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och sätt $g(x) = \max\{f(y);\ 0 \leq y \leq x\}$. Visa att g är kontinuerlig.

7. Rudin kap 4: uppgift 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11.

8. Låt M vara ett metriskt rum och $f : M \to \mathbb{R}$. Visa att f är kontinuerlig på M om och endast om $f^{-1}((a, \infty))$ och $f^{-1}((-\infty, a))$ är öppna i M för alla reella tal a.

9. Låt X och Y vara metriska rum, och E en tät delmängd i X. Antag att $f : E \to Y$ är likformigt kontinuerlig och att Y är fullständigt. Visa att f har en entydig utvidgning till X som är likformigt kontinuerlig på X. (Jämför med övn 13 i Rudin; utnyttja eventuellt resultatet i Rudins övn 11.)

10. Använd idén i beviset av Urysohns lemma för att konstruera en kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ sådan att $f(x_1, x_2) = 0$ omm $\|(x_1, x_2)\| \leq 1$, och $f(x_1, x_2) = 1$ omm $x_1 = 2$. Ange funktionen explicit, samt avgör om den har partiella derivator i punkten $(2, 0)$.

11. Låt A och B vara disjunkta icke-tomma slutna delmängder i ett metriskt rum M. Visa att det finns en kontinuerlig funktion $f : M \to [a, b]$ sådan att $A = f^{-1}(\{a\})$ och $B = f^{-1}(\{b\})$, för godtyckliga reella tal a och b, $a < b$.

12. Rudin kap 4: uppgift 14, 25a.

13. Rudin kap 2: uppgift 19, 20.

14. Visa att ett metriskt rum M är sammanhängande om och endast om M inte är en union av två icke-tomma öppna disjunkta mängder.

15. Vi har sett att i varje metriskt rum M gäller att $\emptyset$ och M är både öppna och slutna. Visa att M är sammanhängande om och endast om $\emptyset$ och M är de enda mängderna som är både öppna och slutna.

16. En mängd S i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *bågvis sammanhängande* om det till varje par av punkter a och b i S finns en kontinuerlig funktion $f : [0, 1] \to S$ sådan att

    $$f(0) = a \ \text{ och } f(1) = b.$$

    Visa att varje bågvis sammanhängande mängd S i $\mathbb{R}^n$ är sammanhängande.

17. Omvändningen till påståendet i föregående uppgift gäller inte, vilket t.ex. inses genom att betrakta mängden

    $$S = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \cup \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$$

    Visa att S är sammanhängande, men inte bågvis sammanhängande i $\mathbb{R}^2$. Rita en bild av S och tänk igenom påståendet!

    Anm. Man kan däremot visa att varje öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$ är bågvis sammanhängande.