Övningar i Reell analys, vt-04.

Kapitel 9

1. Visa att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar i en punkt p om och endast om alla koordinatfunktionerna är differentierbara i p.

2. Låt $f(0,0) = (0,0)$ och $f(x,y) = (x/(1+y^2), y^2 \ln(x^2+y^2))$ för övrigt. Visa att f är differentierbar i $\mathbb{R}^2$. Approximera f linjärt dels i en omgivning till punkten $(0,0)$, dels i en omgivning till punkten $(0,1)$.

3. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara definierad av $f(0) = v$ och $f(x) = x/|x|$ för övrigt. Visa att f är differentierbar överallt, utom i origo (oavsett hur vi väljer v). Bestäm Jacobimatrisen $Df(x)$ för $x \neq 0$.

4. Låt $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Sätt $f(x) = x \cdot L(x)$. Visa att f är differentierbar och bestäm $f'(x)$.

5. Rudin kap 9: uppgift 5, 6, 7.

6. Låt $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en inverterbar linjär avbildning. Gäller då $\|L^{-1}\| = \|L\|^{-1}$?

7. Sätt $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$. Visa att f har en lokal invers g i en omgivning av varje punkt på linjen $x_1 = 1$ utom i $(1,0)$. Bestäm $Dg(b)$ om $b = f(1,a)$, $a \neq 0$.

8. Låt $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
   (a) Visa att f är lokalt inverterbar kring varje punkt i $\mathbb{R}^2$, men att f inte är injektiv (och därmed saknar global invers).
   (b) Bestäm den lokala inversen till f i en omgivning av $(0,0)$.

9. Visa att ekvationen $2x^3 + x^2y + 2xy^2 + 3y^3 = 0$ i en omgivning av $(1,-1)$ definierar en funktion $y = g(x)$, som är deriverbar i en omgivning till $x = 1$. Bestäm $g'(1)$.

10. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1^3 - 2x_2x_3 + x_4^2 &= 2 \\ x_2^3 - 2x_1x_4 - x_3^3 &= -1 \end{cases}$$

i en omgivning av $x_0 = (1, 0, -1, 1)$. Visa att det finns en entydigt bestämd kontinuerligt differentierbar lösning

$$(x_1, x_2) = g(x_3, x_4)$$

och bestäm $Dg(-1, 1)$. Visa också att det finns en entydigt bestämd kontinuerligt differentierbar lösning

$$(x_3, x_4) = h(x_1, x_2)$$

i en omgivning av x_0.

11. Betrakta kurvan $C = \{(x, y) \ ; \ (x^2 + y^2 - 3x)^2 = x^2 + y^2\}$.

    (a) Visa att C har en lodrät tangent i punkten $(4, 0)$.

    (b) I vilka punkter $(a, b) \in C, \ a \geq 0$, är C lokalt graf till en funktion $y = g(x)$?

12. Rudin kap 9: uppgift 16, 23