Övningar i Reell analys, vt-05.

forts Kapitel 2

12. Låt V vara ett vektorrum. En *norm* på V är en reellvärd funktion $\|v\|$ på V som uppfyller följande:

    (a) $\|v\| \geq 0$ för alla $v \in V$.

    (b) $\|v\| = 0$ om och endast om $v = 0$.

    (c) $\|av\| = |a|\|v\|$ för alla $a \in \mathbb{R}$ och $v \in V$.

    (d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ för alla $v, w \in V$.

    Visa att
    $$d(v, w) = \|v - w\|$$
    definierar en metrik på det normerade rummet V.

13. Visa att
    $$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
    och
    $$d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$
    definierar metriker på $\mathbb{R}^2$. Hur ser öppna bollar ut i respektive metrik?

14. Betrakta delmängden S i $\mathbb{R}^2$ där
    $$S = \{(x, y);\ 0 < x < 1,\ y \in \mathbb{R}\}$$
    Visa att S är öppen.

15. Låt M vara ett metriskt rum. Visa att M och $\emptyset$ är både öppna och slutna.

16. Bestäm alla isolerade punkter i och hopningspunkter till följande delmängder av $\mathbb{R}$.

    (a) $\mathbb{Z}$

    (b) $\{\frac{1}{n};\ n = 1, 2, \ldots\}$

    (c) $\mathbb{Q}$

17. Bestäm alla hopningspunkter till följande mängder i $\mathbb{R}$.

    (a) $\{(-1)^n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

    (b) $\{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

    (c) $\{(-1)^n + \frac{1}{m};\ n, m \in \mathbb{Z}^+\}$

18. Vilka av följande delmängder av $\mathbb{R}$ är slutna? Vilka är öppna? Bestäm också alla hopningspunkter.

    (a) $(a, b]$

    (b) $\mathbb{Q}$

    (c) $\{1/n + 1/2^n;\ n = 1, 2, \ldots\}$

19. (a) Visa att i $\mathbb{R}^n$ gäller $\overline{B(a,r)} = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ |a - x| \le r\}$ för alla punkter $a \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. Kan man generalisera påståendet till godtyckliga normerade vektorrum?

    (b) Ge exempel på ett metriskt rum där motsvarande inte gäller.

20. Låt M vara ett metriskt rum, och S en delmängd till M. En punkt $x \in M$ sägs vara en *randpunkt* till S om varje omgivning till x innehåller minst en punkt ur vardera S och S^c. Mängden av randpunkter till S brukar betecknas $\partial(S)$. Visa att

    (a) $\partial(S) = \overline{S} \cap \overline{S^c}$.

    (b) S är sluten om och endast om $\partial(S) \subseteq S$.

21. Betrakta det metriska delrummet M av $\mathbb{R}^2$ där

$$M = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 1,\ x \neq 1\}.$$

    Sätt

$$S = \{(x, y) \in M;\ y \ge 0\}.$$

    Visa att $\operatorname{int}(S) = \{(x, y) \in M;\ y > 0\}$ och att $\partial(S) = \{(-1, 0)\}$.

22. Rudin kap 2: uppgift 5, 6, 7, 8, och 9.