

## Övningar i Reell analys, vt-05.

### forts forts Kapitel 2

23. Visa att  $\mathcal{F} = \{(1/n, 2/n); n \in \mathbb{Z}^+\}$  är en öppen övertäckning av intervallet  $(0, 1)$ . Visa också att ingen ändlig delmängd av  $\mathcal{F}$  täcker  $(0, 1)$ .
24. Betrakta  $\mathbb{Q}$  som ett metriskt delrum till  $\mathbb{R}$ . Låt  $E = \{p \in \mathbb{Q}; \sqrt{2} < p < \sqrt{3}\}$ . Visa att  $E$  är sluten och begränsad, men inte kompakt, i  $\mathbb{Q}$ . Är  $E$  öppen i  $\mathbb{Q}$ ?
25. Betrakta det metriska rummet  $M = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$  med metriken  $d(z, w) = |z - w|$ . Sätt

$$S = \{z \in M; |z| \leq 1/2\}.$$

Visa att  $S$  är sluten och begränsad men inte kompakt. Bestäm också det inre  $\text{int}(S)$ , och randen  $\partial(S)$ .

26. Låt  $K_1$  och  $K_2$  vara två kompakta mängder i ett metriskt rum. Visa att  $K_1 \cup K_2$  är kompakt.
27. Ge exempel på en sluten (äkta) delmängd  $S$  av  $\mathbb{R}$  sådan att  $S$  har en uppräknelig öppen övertäckning som inte kan reduceras till en ändlig delövertäckning.
28. Låt  $p$  vara ett positivt reellt tal. Betrakta familjen

$$\mathcal{F} = \{(x - p, x + p); x \in \mathbb{R}\}$$

Visa att  $\mathcal{F}$  är en öppen övertäckning av  $[0, 1]$  och finn en ändlig delövertäckning.

29. (a) Visa att varje ändlig delmängd av  $\mathbb{R}^n$  är kompakt.  
Gäller detta (dvs att ändliga delmängder är kompakta) i vilket metriskt rum som helst?
- (b) Ge exempel på en uppräknelig och begränsad mängd i  $\mathbb{R}^n$  som inte är kompakt.
30. Cantormängden  $\mathcal{C}$  konstrueras på följande sätt. Starta med intervallet  $I_0 = [0, 1]$ . Dela nu  $I_0$  i tre lika delar och ta bort det öppna mittersta intervallet  $(1/3, 2/3)$ . Vi har nu kvar de två slutna intervallen  $[0, 1/3]$  och  $[2/3, 1]$ . Dela nu vart och ett av dessa två intervall i tre lika delar och uteslut de öppna mitt-intervallen. Vi har nu fyra slutna intervall. Upprepa nu detta förfarande ad infinitum. Den mängd som återstår är Cantormängden  $\mathcal{C}$ . Visa att  $\mathcal{C}$  är kompakt och saknar isolerade punkter.
31. Rudin kap 2: uppgift 10, 12, 13, 14, 15 och ev 29.