

Övningar i Reell analys, vt-05.

forts Kapitel 4

12. Rudin kap 4: uppgift 14, 25a.
13. Rudin kap 2: uppgift 19, 20.
14. Visa att ett metriskt rum M är sammanhängande om och endast om M inte är en union av två icke-tomma öppna disjunkta mängder.
15. Vi har sett att i varje metriskt rum M gäller att \emptyset och M är både öppna och slutna. Visa att M är sammanhängande om och endast om \emptyset och M är de enda mängderna som är både öppna och slutna.
16. En mängd S i \mathbb{R}^n sägs vara *bågvis sammanhängande* om det till varje par av punkter a och b i S finns en kontinuerlig funktion $f : [0, 1] \rightarrow S$ sådan att

$$f(0) = a \text{ och } f(1) = b.$$

Visa att varje bågvis sammanhängande mängd S i \mathbb{R}^n är sammanhängande.

17. Omvändningen till påståendet i föregående uppgift gäller inte, vilket t.ex. inses genom att betrakta mängden

$$S = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \cup \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$$

Visa att S är sammanhängande, men inte bågvis sammanhängande i \mathbb{R}^2 . Rita en bild av S och tänk igenom påståendet!

18. Visa att varje öppen sammanhängande mängd i \mathbb{R}^n är bågvis sammanhängande.