Övningar i Reell analys, vt-05.

Kapitel 7

1. Undersök om följande två funktionsföljder konvergerar punktvis på $[0,1]$. Är konvergensen likformig?

   (a) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$

   (b) $g_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$

2. Visa att funktionsföljden $f_n(x) = n\sin(x/n)$ konvergerar likformigt på varje kompakt del av $\mathbb{R}$.

3. Undersök följande funktionsföljder med avseende på punktvis och likformig konvergens på S. Undersök också om konvergensen är likformig på varje kompakt del av S.

   (a) $f_n(x,y) = \frac{n+x^2}{n+y^2}, \quad S = \mathbb{R}^2$

   (b) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}, \quad S = (0,\infty)$

4. Visa att $f_n(x) = x^n$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $[0,1]$. Låt sedan g vara en godtycklig kontinuerlig funktion på $[0,1]$ sådan att $g(1) = 0$. Visa att $g_n(x) = x^n g(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

5. Låt c vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt

$$f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1].$$

   Visa först att $f_n(x) \to 0$ punktvis på $[0,1]$. Undersök sedan för vilka c

   (a) $f_n(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \; = \; 0.$

6. Rudin kap 7: uppgift 1, 2, 3, 7, 20, 24.