# Övningar i Reell analys, vt-06.

## Kapitel 1

1. Ange (i den mån de existerar) supremum, infimum, största element och minsta element till följande delmängder av $\mathbb{R}$.

   (a) $\{\frac{n}{n+1};\ n = 1, 2, \ldots\}$

   (b) $\{\frac{x}{x+1};\ x > 0\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{Q};\ x \leq \pi\}$

2. Bestäm $\sup\{a_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ och $\inf\{a_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ om

   (a) $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

   (b) $a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$

   (c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n}$

3. Finn supremum och infimum av följande mängder

   (a) $\{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r};\ p, q, r \in \mathbb{Z}^+\}$

   (b) $\{x;\ 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$

4. Visa att mängden $\{x \in \mathbb{Q};\quad x^2 < 2\}$ inte har någon minsta rationell majorant, genom att visa att om $r$ vore en sådan så skulle $r^2 = 2$. Gör detta under förutsättning att $\mathbb{R}$ inte är konstruerat!

5. I konstruktionen av $\mathbb{R}$ definieras $\alpha > 0$ för $\alpha \in \mathbb{R}$ som $(a_n) > 0$ (för definition av detta se stencilen), där $\alpha = [a_n]$. Visa att definitionen är oberoende av valet av representant $(a_n)$ för $\alpha$.

6. Visa Lemma 4 i föreläsningsanteckningarna.

7. Rudin kap 1: uppgift 1, 5, 8 och 9.