Övningar i Reell analys, vt-06.

Kapitel 2

1. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa att

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ och } f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

för alla $A, B \subseteq S$.

2. Betrakta funktionen $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{om } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Bestäm följande mängder

$$f^{-1}(\{2\}),\ f^{-1}([1, \infty)),\ f^{-1}([0, 1/2]).$$

3. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa följande två påståenden.

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \text{ för alla } X \subseteq S$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \text{ för } Y_1, Y_2 \subseteq T$$

4. (a) Betrakta funktionen $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{om } -1 \leq x \leq 1,\ x \text{ rationellt} \\ -x & \text{om } -1 \leq x \leq 1,\ x \text{ irrationellt} \end{cases}$$

Visa att f är en-entydig och bestäm inversen f^{-1}.

(b) Betrakta funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definierad genom

$$f(x) = n \text{ om } n-1 \leq x < n,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bestäm $f([0, p])$ och $f^{-1}([0, p])$ för varje positivt tal p.

5. Låt $f : S \to T$ vara en given funktion. Visa att följande tre villkor är ekvivalenta.

(a) f är en-entydig.

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ för alla $A, B \subseteq S$.

(c) $f^{-1}(f(A)) = A$ för alla $A \subseteq S$.

6. Visa att varje oändlig mängd har en uppräknelig delmängd.

7. Låt S vara en oändlig mängd. Visa att det finns en äkta delmängd T av S som har samma kardinalitet som S.

8. Ett reellt tal x kallas *algebraiskt* om det finns heltal $a_0, \ldots, a_n$, ej alla noll, sådana att
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$
   Visa att mängden av (reella) algebraiska tal är uppräknelig.

   Komplexa algebraiska tal definieras analogt, och omfattar förstås de reella algebraiska talen. Är de också uppräkneliga?

9. Visa att det finns reella tal som inte är algebraiska. Sådana tal kallas *transcendenta*. "Hur många" transcendenta tal finns det?

10. Låt S vara mängden av funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Visa att S inte har samma kardinalitet som $\mathbb{R}$.

11. För en mängd S betecknas mängden av delmängder till S med $\mathcal{P}(S)$. Visa att $\mathcal{P}(S)$ inte har samma kardinalitet som S.

Anm. De två sista uppgifterna är ganska(!) svåra. Om du kör fast, så ersätt $\mathbb{R}$ i 10) med en ändlig mängd, och betrakta enbart ändliga mängder i 11).