Övningar i Reell analys, vt-06.

forts forts Kapitel 2

23. Visa att $\mathcal{F} = \{(1/n, 2/n);\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ är en öppen övertäckning av intervallet $(0,1)$. Visa också att ingen ändlig delmängd av $\mathcal{F}$ täcker $(0,1)$.

24. Betrakta $\mathbb{Q}$ som ett metriskt delrum till $\mathbb{R}$. Låt $E = \{p \in \mathbb{Q}\ ;\ \sqrt{2} < p < \sqrt{3}\}$. Visa att E är sluten och begränsad, men inte kompakt, i $\mathbb{Q}$. Är E öppen i $\mathbb{Q}$?

25. Betrakta det metriska rummet $M = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < 1\}$ med metriken $d(z,w) = |z - w|$. Sätt

$$S = \{z \in M;\ |z| \leq 1/2\}.$$

Visa att S är sluten och begränsad men inte kompakt. Bestäm också det inre $\operatorname{int}(S)$, och randen $\partial(S)$.

26. Låt K_1 och K_2 vara två kompakta mängder i ett metriskt rum. Visa att $K_1 \cup K_2$ är kompakt.

27. Ge exempel på en sluten (äkta) delmängd S av $\mathbb{R}$ sådan att S har en uppräknelig öppen övertäckning som inte kan reduceras till en ändlig delövertäckning.

28. Låt p vara ett positivt reellt tal. Betrakta familjen

$$\mathcal{F} = \{(x-p, x+p);\ x \in \mathbb{R}\}$$

Visa att $\mathcal{F}$ är en öppen övertäckning av $[0,1]$ och finn en ändlig delövertäckning.

29. (a) Visa att varje ändlig delmängd av $\mathbb{R}^n$ är kompakt.
    Gäller detta (dvs att ändliga delmängder är kompakta) i vilket metriskt rum som helst?

    (b) Ge exempel på en uppräknelig och begränsad mängd i $\mathbb{R}^n$ som inte är kompakt.

30. Cantormängden $\mathcal{C}$ konstrueras på följande sätt. Starta med intervallet $I_0 = [0,1]$. Dela nu I_0 i tre lika delar och ta bort det öppna mittersta intervallet $(1/3, 2/3)$. Vi har nu kvar de två slutna intervallen $[0,1/3]$ och $[2/3,1]$. Dela nu vart och ett av dessa två intervall i tre lika delar och uteslut de öppna mitt-intervallen. Vi har nu fyra slutna intervall. Upprepa nu detta förfarande ad infinitum. Den mängd som återstår är Cantormängden $\mathcal{C}$. Visa att $\mathcal{C}$ är kompakt och saknar isolerade punkter.

31. Rudin kap 2: uppgift 10, 12, 13, 14, 15 och ev 29.