Övningar i Reell analys, vt-06.

forts Kapitel 4

12. Rudin kap 4: uppgift 14, 25a.

13. Rudin kap 2: uppgift 19, 20.

14. Visa att ett metriskt rum M är sammanhängande om och endast om M inte är en union av två icke-tomma öppna disjunkta mängder.

15. Vi har sett att i varje metriskt rum M gäller att $\emptyset$ och M är både öppna och slutna. Visa att M är sammanhängande om och endast om $\emptyset$ och M är de enda mängderna som är både öppna och slutna.

16. En mängd S i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *bågvis sammanhängande* om det till varje par av punkter a och b i S finns en kontinuerlig funktion $f : [0, 1] \to S$ sådan att
$$f(0) = a \text{ och } f(1) = b.$$
Visa att varje bågvis sammanhängande mängd S i $\mathbb{R}^n$ är sammanhängande.

17. Omvändningen till påståendet i föregående uppgift gäller inte, vilket t.ex. inses genom att betrakta mängden
$$S = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \cup \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$$
Visa att S är sammanhängande, men inte bågvis sammanhängande i $\mathbb{R}^2$. Rita en bild av S och tänk igenom påståendet!

18. Visa att varje öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$ är bågvis sammanhängande.