Övningar i Reell analys, vt-06.

Kapitel 7

1. Undersök om följande två funktionsföljder konvergerar punktvis på $[0,1]$. Är konvergensen likformig?

   (a) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$
   (b) $g_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$

2. Visa att funktionsföljden $f_n(x) = n\sin(x/n)$ konvergerar likformigt på varje kompakt del av $\mathbb{R}$.

3. Undersök följande funktionsföljder med avseende på punktvis och likformig konvergens på S. Undersök också om konvergensen är likformig på varje kompakt del av S.

   (a) $f_n(x,y) = \frac{n+x^2}{n+y^2}$, $S = \mathbb{R}^2$
   (b) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $S = (0,\infty)$

4. Visa att $f_n(x) = x^n$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $[0,1]$. Låt sedan g vara en godtycklig kontinuerlig funktion på $[0,1]$ sådan att $g(1) = 0$. Visa att $g_n(x) = x^n g(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

5. Låt c vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt

   $$f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1].$$

   Visa först att $f_n(x) \to 0$ punktvis på $[0,1]$. Undersök sedan för vilka c

   (a) $f_n(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$
   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$.

6. Rudin kap 7: uppgift 1, 2, 3, 7, 16, 20, 24.

7. Låt P_n vara en följd av polynom av grad $\leq N$ och antag att $P_n \to f$ likformigt på $[a,b]$. Visa att då är f ett polynom av grad $\leq N$.

   Ledning: konstruera kontinuerliga funktioner h_k, för varje $k \leq N$, sådana att

   $$\int_a^b h_k(x)x^j dx = 0 \text{ för alla } j \leq N \text{ sådana att } j \neq k$$

   $$\text{men} \int_a^b h_k(x)x^k dx = 1$$

   och betrakta

   $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_k(x)P_n(x)dx\ .$$