MATEMATIK	Datum: 97-10-27	Tid: 08.45-13.45
Göteborgs Universitet	Hjälpmedel: Inga	Telefonvakt: Niklas Lindholm
J.L.		Tel.: 0740-479626

Tentamensskrivning i MAN 040, Linjär Algebra, del 1

Teoriuppgifter

1. Visa följande sats:
   Låt A vara en $m \times n-$matris. Då är följande villkor ekvivalenta:

   (a) För varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning.
   (b) Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$.
   (c) A har en pivotposition i varje rad.

   Beviset skall innehålla en redovisning av definitionerna av de begrepp som förekommer i satsens formulering. (3p)

2. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska! Bevisa de sanna och motbevisa de falska, t.ex. genom att ge ett motexempel.

   (a) Om A är en matris med sju rader och fem kolonner och $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 3$, så har A fyra pivotkolonner.
   (b) Om kolonnerna i en matris är linjärt oberoende, så är raderna det också.
   (c) Om A är diagonaliserbar, så är A radekvivalent med en diagonalmatris. (3p)

Problemuppgifter

3. En raket sänds ut från origo. Den rör sig med konstant hastighet längs en rät linje i riktningen $(2, 1, 1)$ och passerar så småningom planen $x + y + 2z = 10$ och $2x + y - z = 9$. Vilket av dessa plan når raketen först? Motivera svaret! (3p)

4. Bestäm baser för nollrummet och kolonnrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(3p)

5. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

   Bestäm alla $3 \times 2-$matriser X, som löser matrisekvationen $AX = 0$. (3p)

6. Vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. För vilka tal a och b är även

$$\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3$$

   linjärt oberoende? (3p)

VÄND!

7. Låt T vara den matrisavbildning, som definieras av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bestäm en parallellepiped P med volymen 5, sådan att P och dess bild $T(P)$ har parallella sidor. Vad är volymen av bilden? (4p)

8. Beräkna $n \times n-$determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-3 & 2n-1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 2n-5 & 2n-3 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2n-7 & 2n-5 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad måndagen den 3 november, efter kl. 14.00.