| | | |
|---|---|---|
| MATEMATIK | Datum: 98-01-02 | Tid: 08.45-13.45 |
| Göteborgs Universitet | Hjälpmedel: Inga | Telefonvakt: Sebastian Sandberg |
| J.L. | | Tel.: 0740-479626 |

**Tentamensskrivning i MAN 040, Linjär Algebra, del 1**

**Teoriuppgifter**

1. Definiera först vad som menas med att en mängd $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ är linjärt oberoende. Visa därefter följande sats:
   Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till en kvadratisk matris, så är $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ linjärt oberoende. (4p)

2. Låt $A$ vara en $4 \times 5-$matris. Två frågor ställs:

   Fråga 1: Vilken dimension har kolonnrummet för $A$?
   Fråga 2: Ligger vektorn $(1, 2, 3, 4)$ i kolonnrummet för $A$?

   Två utsagor är givna:

   (a) dimensionen av nollrummet för $A$ är 2
   (b) $(1, 1, 1, 1)$ och $(1, 0, 1, 0)$ ligger i kolonnrummet för $A$

   Det gäller nu att för var och en av de båda frågorna avgöra om frågan kan besvaras med hjälp av

   enbart (a)
   enbart (b)
   (a) och (b) var för sig
   (a) och (b) tillsammans, men inte var för sig

   eller om frågan är oavgörbar. Motivera svaren! (3p)

**Problemuppgifter**

3. Låt $L$ vara skärningslinjen mellan de båda planen

   $$x + y + z = 10 \text{ och } x - y + 2z = 20$$

   Finn ekvationen för *någon* linje, som skär $L$ under rät vinkel. Välj enkla siffervärden, men glöm inte att motivera svaret! (3p)

4. Bestäm den punkt i planet $y = 2x$, som ligger närmast punkten $(3, 2, 1)$. (3p)

5. Undersök om vektorerna

   $$(0, 1, 2, 3), \quad (1, 2, 3, 0), \quad (2, 3, 0, 1), \quad (3, 0, 1, 2)$$

   är linjärt oberoende! (3p)

VÄND!

6. För vilka värden på parametern $a$ är följande matris inverterbar? Bestäm inversen i dessa fall!

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

(3p)

7. Låt $\mathbf{u}$ vara en given vektor i rummet med längden 1. Betrakta kryssprodukten $\mathbf{u}\times\mathbf{x}$, där $\mathbf{x}$ är en varierande vektor i rummet. Motivera varför avbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u} \times \mathbf{x}$ är linjär och bestäm dess matris och nollrum! (3p)

8. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -x \\ 0 & 2 & 0 \\ -x & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

där $x > 0$. För vilka sådana $x$ är $A$ diagonaliserbar? (3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad den måndag den 19 januari, efter kl. 14.
Resultaten anslås i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC).
Du kan också få veta resultatet genom att ringa nummer 772 35 09, efter kl. 14.
Din rättade skrivning kan hämtas efter angivet datum i mottagningsrummet
(MC rum 1202D) , måndag - fredag kl. 12 - 13