| | | |
|---|---|---|
| MATEMATIK | Datum: 98-03-14 | Tid: 08.45-13.45 |
| Göteborgs Universitet | Hjälpmedel: Inga | Telefonvakt: Anette Wiberg |
| T.W./(utskrift J.L.) | | Tel.: 0740-479626 |

**Tentamensskrivning i Linjär Algebra, del 1, 4p (MAN 040)**

1. (a) Definiera begreppet matrisinvers. (0.5p)

   (b) Bestäm $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & -10 \end{bmatrix}^{-1}$. (1.0p)

   (c) Visa att om $A$ och $B$ är inverterbara matriser av samma typ så är $AB$ inverterbar. (1.5p)

2. Låt $C$ vara en $(m \times n)-$matris och låt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

   (a) Visa att om det finns en matris $A$ sådan att $AC = I$ så har ekvationen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ högst en lösning. Vad måste gälla om $m$ och $n$ för att det skall kunna finnas en sådan $A$ ?

   (b) Visa att om det finns en matris $B$ sådan att $CB = I$ så har ekvationen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning. Vad måste gälla om $m$ och $n$ för att det skall kunna finnas en sådan $B$ ?

   (3p)

3. Låt $L$ vara skärningslinjen mellan planen $x - y + z + 4 = 0$ och $2x + y + z - 1 = 0$. Bestäm den punkt på linjen $L$ som ligger närmast punkten $(-4, 2, 3)$ och bestäm avståndet mellan dessa punkter. (3p)

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 5 & 11 \\ 2 & -4 & 3 & -11 & -6 \\ 3 & -6 & -1 & 0 & 13 \end{bmatrix}$
   Bestäm baser för $A$:s nollrum, kolonnrum och radrum och ange under vilka villkor på kolonnvektorn $\mathbf{b}$ som ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbar.
   (Radrummet är det delrum av $\mathbb{R}^5$ som $A$:s rader genererar.) (4p)

5. Lös ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & 81 \\ 1 & x & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0.$
   (1p till den som bara visar att $x = 1,\ x = 2$ och $x = -3$ är lösningar.) (3p)

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.
   Bestäm en inverterbar matris $P$ och en diagonalmatris $D$ sådan att $A = PDP^{-1}$. (3p)

VÄND!

7. I ett land med 12 miljoner innevånare har man observerat att 10% av stadsbefolkningen flyttar till landet och att 20% av landsortsbefolkningen flyttar till städerna varje år. Om vi förutsätter att folkmängden är konstant, att omflyttningen fortsätter på samma sätt och att det från början bor 5 miljoner människor i städer och 7 miljoner på landet, hur är befolkningsfördelningen

   (a) efter 1 år?

   (b) efter många år?(Dvs. då antalet år går mot oändligheten.)

   (3p)

8. Bestäm en matris med nollrumm genererat av $(2, 0, 1, 0)$ och $(0, 3, -2, 1)$ och kolonnrum genererat av $(1, 2, 3)$ och $(2, -3, -1)$. (3p)