MATEMATIK	Datum: 98-04-04	Tid: 08.45-13.45
Göteborgs Universitet	Hjälpmedel: Inga	Telefonvakt: Niklas Lindholm
T.W./(utskrift J.L.)		Tel.: 0740-479626

Tentamensskrivning i Linjär Algebra, del 1, 4p (MAN 040)

1. Definiera begreppet linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och visa att till varje sådan finns en entydigt bestämd matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. (3p)

2. Definiera begreppet underrum till $\mathbb{R}^n$ och visa att om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning och λ är ett reellt tal så är $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}$ ett underrum till $\mathbb{R}^n$. (3p)

3. (a) Bestäm spegelbilden av punkten (a, b, c) i linjen $L : 3x = -6y = 2z$.

   (b) Bestäm matrisen för den linjära operator på $\mathbb{R}^3$ som ges av speglingen i L.

   (3p)

4. (a) Bestäm $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$

   (b) Visa att $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

   (c) Visa att $(2, 3, -4)$ är en egenvektor till $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ och ange motsvarande egenvärde.

   (3p)

5. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

   Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ för $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och för $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (b) Ange en matris X sådan att $AX = I$.

   (3p)

6. Låt $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

   (a) bestäm en inverterbar matris P sådan att $P^{-1}AP$ är diagonal. (2p)

   (b) Bestäm en matris B sådan att $B^3 = A$. (2p)

7. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

   Visa att A:s nollrum är en delmängd av A:s kolonnrum. (3p)

8. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara egenvektorer till en matris A hörande till olika egenvärden. Visa att $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ inte är en egenvektor till A. (3p)