6.1 Hermiteska matriser (häfte)

Definition 1. Låt $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ och $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ vara godtyckliga vektorer i $\mathbb{C}^n$. Skalärprodukten $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}$ mellan $\mathbf{z}$ och $\mathbf{w}$ definieras då med hjälp av formeln

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{w} = \bar{z}_1 w_1 + \ldots + \bar{z}_n w_n$$

Sats Egenskaper hos skalärprodukten. *Om* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ *och* $z \in \mathbb{C}$ *så gäller*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} \qquad (1)$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \qquad (2)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \qquad (3)$$

$$(z\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{z}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \qquad (4)$$

$$\mathbf{u} \cdot (z\mathbf{v}) = z(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \qquad (5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \qquad (6)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{om och endast om } \mathbf{u} = \mathbf{0}. \qquad (7)$$

Observera särskilt (1) och (4) som avviker från räknereglerna för skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$*.*

Många satser från det reella fallet gäller också då $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.

Pythagoras sats:
om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala ($\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{v} = \mathbf{0}$) så är

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Cauchys olikhet:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Triangelolikheten:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Sats Spektralsatsen för Hermiteska matriser. *Låt A vara en Hermitesk $n \times n$-matris. Då gäller*

(a) *A har n reella egenvärden (inräknat multiplicitet)*

(b) *dimensionen av egenrummet hörande till ett viss egenvärde är detta egenvärdes multiplicitet*

(c) *egenrum som hör till olika egenvärden är ortogonala*

(d) *det finns en unitär matris U och en diagonalmatris D, sådan att*

$$A = UDU^*$$

(e) *om A är reell och symmetrisk så kan U ovan väljas reell, ortogonal.*