Sats 8 (Ortogonaluppdelningssatsen). *Låt W vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$. Då kan varje $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ skrivas entydigt på formen*

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z},$$

där $\hat{\mathbf{y}}$ är i W och $\mathbf{z}$ i $W^\perp$.

Om $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ är en ortogonalbas för W, så är

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p,$$

och $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

$\hat{\mathbf{y}} = \operatorname{proj}_W \mathbf{y}$ är den ortogonala projektionen på W.

Sats 9 (Bästa approximationssatsen). *Låt W vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ och $\hat{\mathbf{y}} = \operatorname{proj}_W \mathbf{y}$. Då är $\hat{\mathbf{y}}$ den punkt i W som är närmast $\mathbf{y}$, dvs*

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$$

för alla $\mathbf{v}$ i W, $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$.

Sats 11 (Gram-Schmidt-processen). *Givet en bas $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ för ett delrum W, definiera*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_p = \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_p}{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p}\mathbf{v}_p$$

Då är $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ en ortogonalbas för W, och dessutom är

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

för $1 \leq k \leq p$.

Minsta kvadrat-problem

Definition 6. *Givet en $m \times n$-matris A, så är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en vektor $\hat{\mathbf{x}}$ sådan att*

$$\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

för alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

- Hur hitta ett sådant $\hat{\mathbf{x}}$?
- Ett sätt är att använda normalekvationerna.

Vektorn $\hat{\mathbf{x}}$ är en minsta kvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om.m. det är lösning till systemet (normalekvationerna)

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}.$$

OBS: Det är inte alltid det finns en entydig lösning $\hat{\mathbf{x}}$.

Sats 14. *$A^T A$ är inverterbar om.m. A har linjärt oberoende kolonner, och då har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bara en minsta kvadrat-lösning $\hat{\mathbf{x}}$, given av* $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}$.

Då ges också projektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}(A)$ av

$$\mathrm{proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}} = A(A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}.$$