6, Ortogonalitet och minsta kvadratproblem

6.1

- Skalärprodukt (eller inre produkt, “dot product”)
- Längd av vektor, avstånd mellan vektorer
- Ortogonalitet
- Pytagoras sats
- Ortogonalt kompement
- Samband mellan rad- och nollrum för matris

6.2 Ortogonala mängder och baser

- att uttrycka en vektor i en ortogonalbas
- orto<u>normala</u> mängder

6.3 Ortogonal projektion

- Ortogonaluppdelningssatsen
- Geometrisk tolkning
- Bästa approximation

Och nästa gång:

6.4 Gram-Schmidt

Att hitta en ortogonalbas

6.5 Minsta kvadratproblem

6.6 Tillämpningar på linjära modeller

Definition 1. *Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, så är den inre produkten av $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ och $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n \qquad (1)$$

Den uppfyller följande räkneregler

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ om.m. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Genom att använda (b) och (c) upprepade gånger, kan man visa att

$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_p\mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w} + \ldots + c_p\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{w} \qquad (2)$$

Definition 2. *Längden av en vektor $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$ definieras av*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2} \qquad (3)$$

Det följer att $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Avståndet mellan två vektorer u, v i $\mathbb{R}^n$ är

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \qquad (4)$$

Definition 3. *Två vektorer* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *sägs vara ortogonala (mot varandra) om* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Sats (Pythagoras). *Två vektorer* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *är ortogonala om.m.*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \qquad (5)$$

Sats 4. *Om* $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_p\}$ *är en ortogonal mängd med nollskilda vektorer i* $\mathbb{R}^n$*, så är* S *linjärt oberoende (och följaktligen en bas för span*(S)*).*

Sats 5. *Låt* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *vara en ortogonalbas för ett delrum* W *till* $\mathbb{R}^n$*. Då kan varje* $\mathbf{y}$ *i* W *skrivas som en unik linjärkombination av* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$*.*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots c_p\mathbf{u}_p, \qquad (6)$$

där

$$c_k = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}, \quad k = 1, \ldots, p \qquad (7)$$

Definition 4. *En mängd* $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ *kallas* ***ortonormal*** *(ON) om*

- $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ *är ortogonal*
- *Varje* $\mathbf{u}_k$ *har längd ett, för* $k = 1, \dots, p$. *(*$\mathbf{u}_k$ *är normaliserad).*

Sats 6. *En* $m \times n$*-matris* U *har ortonormala kolonner om.m.* $U^T U = I$.

Definition 5. *Om* U *dessutom är en kvadratisk* $n \times n$*-matris sådan att* $U^T U = I$*, så kallas* U *för* ***ortogonalmatris****. Då gäller att*

- *Kolonnerna är en ON-bas för* $\mathbb{R}^n$.
- $U^{-1} = U^T$
- *Raderna är en ON-bas för* $\mathbb{R}^n$.

Givet en vektor $\mathbf{y}$ och ett delrum W till $\mathbb{R}^n$, så finns det en vektor $\hat{\mathbf{y}}$ i W sådan att

- $\hat{\mathbf{y}}$ är den unika vektor i W s.a. $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ är ortogonal mot W
- $\hat{\mathbf{y}}$ är vektorn i W som ligger närmast $\mathbf{y}$.

Denna vektor $\hat{\mathbf{y}}$ hittas genom att med hjälp av en ortogonalbas för W skriva

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \tag{8}$$

där $\mathbf{z} \perp W$.