Linjär Algebra, del 2, VT 98

Veckoprogram, vecka 13, 14 & 16

H.D. 20 mars 1998

Föreläsningar (10.00-11.45)
må 23/3 : L4:1-3
ti 24/3 : L4:4-6
må 30/3 : L4:8,L5:1-4
ti 31/3 : L5:5-7
ti 14/4 : L6:1-3

Lektioner (08.00-09.45)
Nyckeluppgifter:
ti 24/3
L4.1: 7,8,15,17,19,21
L4.2: 23,28,31,33,34
L4.3: 15,19,25,27
Blandade övningar 34-37

må 30/3, ti 31/3:
L4.4: 7,9,13,27,33
L4.5: 5,7,13,21,23,27,29
L4.6: 3,4,9,11,19,21
L4.8: 13,15,25
L4.suppl: 1,2
Blandade övningar 38-40

ti 14/4:
L5.1: 16,33
L5.2: 17,18
L5.3: 15,19
L5.4: 3,5,9
Blandade övningar 41-44

Blandade övningar, vecka 13, 14 & 16

34. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska. Bevisa de sanna utsagorna och motbevisa de falska, gärna med motexempel. I samtliga uppgifter är A en kvadratisk matris.

    (a) Om A är inverterbar så är raderna i A linjärt oberoende.

    (b) Om A är inverterbar så är kolonnerna i inversen A^{-1} linjärt oberoende.

    (c) Om kolonnerna i A^2 är linjärt oberoende så är även kolonnerna i A linjärt oberoende.

35. Låt $\{e_1, e_2, e_3\}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Går det att finna en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sådan att

$$e_1 = T(e_2) + T(e_3)\ ,\ e_2 = T(e_3) + T(e_1)\ ,\ e_3 = T(e_1) + T(e_2)$$

    Bestäm standardmatrisen för T i så fall! Är T injektiv?

36. Bestäm baser för nollrummet, kolonnrummet och radrummet för matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

37. Konstruera om möjligt matriser A_1, A_2, A_3 i följande fall. Motivera varför de konstruerade matriserna har de angivna egenskaperna eller förklara varför konstruktionen inte är möjlig.

   (a) $A_1 x = b$ har mer än en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och A_1 har fyra linjärt oberoende kolonner.

   (b) $A_2 x = b$ har precis en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och A_2 har tre linjärt oberoende kolonner.

   (c) $A_3 x = b$ har mer än en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och A_3 har fem linjärt oberoende kolonner.

38. Betrakta det linjära rummet $\mathbb{S}$ av alla signaler (y_k), där k genomlöper alla heltal. Låt H vara alla $y = (y_k)$ i $\mathbb{S}$, som uppfyller differensekvationen

$$y_{k+2} + 0.30 y_{k+1} + 0.02 y_k = 0 \tag{1}$$

   (a) Visa att H är ett underrum av $\mathbb{S}$

   (b) Inför beteckningarna

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 \\ -0.02 & -0.30 \end{bmatrix}$$

   Visa att ekvationen (1) är ekvivalent med

$$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k$$

   (c) Finn egenvärdena och en bas av egenvektorer till M.

   (d) Visa att $u = ((-0.2)^k)$ och $v = ((-0.1)^k)$ definierar två linjärt oberoende lösningar till (1)

   (e) Visa att $\{u, v\}$ är en bas i H

   (f) Visa att det för varje lösning y till (1) gäller att $y_k \to 0$ då $k \to \infty$.

39. Inspirerad av föregående uppgift, finn en formel för y_n där n är ett godtyckligt naturligt tal, om man vet att y löser differensekvationen

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$$

och dessutom känner värdena av y_0 och y_1.

40. Låt u och v vara kolonnvektorer i $\mathbb{R}^n$, båda skilda från nollvektorn. Sätt

$$A = uv^T$$

Visa att rangen för A är 1. Bestäm också nollrum, kolonnrum och radrum för matrisen A.

41. I det linjära rummet $\mathbb{P}_N$ av alla polynom av graden N betraktar vi derivationsoperatorn D, dvs $Dp(t) = p'(t)$. Bestäm matrisen för D i standardbasen i $\mathbb{P}_N$.

42. Man kan visa att funktionerna $c_n(t) = \cos(nt), n = 0, 1, 2, \ldots, N$ är linjärt oberoende i det linjära rummet $C(\mathbb{R})$ av alla kontinuerliga funktioner på reella axeln. (Gör gärna ett försök att visa det!) Låt nu H_N vara det linjära rum som spänns upp av $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_N$. Betrakta den linjära avbildningen $T : H_N \to H_N$, definierad genom

$$T(f) = -f''$$

Bestäm matrisen för T i basen $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_N\}$. Vad är nollrummet av T.

43. Låt $M_{2\times 2}$ vara det linjära rummet av alla 2×2−matriser. Sätt

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

och

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

(a) Visa att $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ och $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ är baser i $M_{2\times 2}$.

(b) Låt H vara underrummet av alla symmetriska matriser. Visa att $\{F_1, F_2, F_3\}$ är en bas i H.

(c) Betrakta avbildningen $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definierad genom

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Bestäm matrisen för T i de båda baserna. Avgör om T är surjektiv, injektiv eller bådadera.

44. I Lisas och Olles leksakslåda finns massor av klossar. De är röda, gröna, gula och blå. Det finns kubiska klossar med fem centimeters sida och det finns avlånga klossar som består av två sammanfogade kubiska klossar i samma färg. På hur många sätt kan Lisa och Olle tillsammans lägga sina klossar i en en meter lång rad?
(En ledning kan kanske behövas: Låt y_k vara alla sätt att lägga ut en $5k$ cm lång rad. Man kan då relatera y_{k+2} till y_{k+1} och y_k genom att fundera ut hur den sista klossen i raden kan se ut!)

Svar till blandade övningar

34. Alla tre utsagorna är sanna!

35. Matrisen är

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

36. Bas för kolonnrummet : de tre första kolonnerna i matrisen
Bas för radrummet : de tre första raderna i matrisen
Bas för nollrummet : $(-15,-14,4,8,0),(-19,-22,12,0,8)$

37. (c) är omöjlig

38. Matrisen M har egenvärdena -0.2 och -0.1.

39. $y_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

40. Kolonnrummet består av alla vektorer av formen tu , t skalär.
Radrummet består av alla tv
Nollrummet består av alla vektorer som är ortogonala mot v

41. Matrisen är

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

42. Matrisen är

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1)^2 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N^2 \end{bmatrix}$$

Nollrummet är Span(c_0).

43. Matrisen i $E-$basen är

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisen i $F-$basen är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

44. Man får differensekvationen $y_{k+2} = 4y_{k+1} + 4y_k, y_1 = 4, y_2 = 20$ som ger

$$y_k = 2^k((1+\sqrt{2})^{k+1} - (1-\sqrt{2})^{k+1})/(2\sqrt{2})$$